





JOURNAL

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

TOME III.

SEPTIÈME ET HUITIÈME CAHIERS,

Contenant les trois premières parties d'un Ouvrage du C.en PRONY, intitulé *Mécanique philosophique.*

La IV.e et la V.e partie de cet ouvrage paraîtront dans quelques mois, avec un Tableau synoptique de toutes les parties de la mécanique.

MÉCANIQUE

PHILOSOPHIQUE,

OU

ANALYSE RAISONNÉE

DES DIVERSES PARTIES

DE LA SCIENCE

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT;

PAR *R. PRONY*,

De l'Institut national des Sciences et des Arts.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.

AN VIII.

Et se trouve chez le C.en BERNARD, libraire, quai des Augustins, n.° 37.

PRÉFACE.

Les théories mathématiques offrent, en général, les élémens de la langue scientifique, ou les *définitions*, les solutions d'un certain nombre de questions ou *problèmes*, et des propositions qu'on déduit de ces solutions, comme conséquences, ou dont on cherche immédiatement les démonstrations ; ce qui fournit une suite de *résultats* séparés entre eux par les raisonnemens et les calculs propres à en établir la liaison et à en démontrer la vérité.

Je me suis proposé, dans l'ouvrage suivant, de donner un tableau méthodique de ces résultats, dégagé de la partie des démonstrations et des calculs intermédiaires, qui n'est d'une nécessité absolue que pour les premières études, en me bornant à faire connaître l'esprit des méthodes, à indiquer les principaux anneaux ou la trace de la chaîne qui lie les propositions entre elles, en facilitant enfin au lecteur, autant qu'il m'a été possible, les moyens de bien saisir l'ensemble et la correspondance des diverses parties de la science, sans fatiguer son attention et sans charger sa mémoire de ce qui n'est pas rigoureusement nécessaire pour parvenir à ce but.

Ce traité contient ainsi ce qu'on peut appeler la partie philosophique de la mécanique ; et c'est ce qui m'a décidé dans le choix du titre que je lui ai donné, à l'exemple de Fourcroy, qui a appelé *Philosophie chimique*, un livre où il s'est proposé, pour la chimie, un objet semblable à celui que j'ai voulu remplir pour la mécanique.

La MÉCANIQUE PHILOSOPHIQUE est composée, en très-grande partie, sur les cahiers de mes leçons, et d'après les matériaux que j'ai rassemblés depuis cinq ans que je suis professeur à l'École polytechnique ; en sorte que la rédaction détaillée a toujours précédé la rédaction synoptique et lui a servi de base. J'ai été à portée de connaître, en comparant les peines que m'ont données l'une et l'autre de ces rédactions, combien il est difficile d'abréger, et combien, au lieu d'un tableau raisonné, il m'eût été plus commode de donner un cours complet.

Mais les obstacles ne m'ont point découragé, et j'ai voulu achever un travail que je croyais devoir être utile, qui manquait à la mécanique, et qui présente un nouveau plan d'exposition, qu'on peut appliquer avantageusement aux autres parties des mathématiques.

En effet, les géomètres, qui dans le cours de leurs recherches ont souvent besoin de se rappeler des résultats et même des méthodes dont le souvenir ne leur est pas bien présent, se serviront utilement d'un tableau raisonné de la science, d'où l'on a élagué tout ce qui est inutile à l'objet qu'ils ont en vue. Les instituteurs n'en tireront pas un parti moins avantageux ; l'expérience a appris qu'ils doivent éviter et de mettre dans les mains de leurs élèves des leçons manuscrites ou imprimées qui en contiennent tous les détails et ne laissent rien à faire à la mémoire et à la réflexion, et de tomber dans l'excès contraire en se contentant d'une exposition orale : un livre comme celui que je publie, tient le milieu entre ces deux extrêmes ; il fournit à l'étudiant le moyen de mettre ensemble, de coordonner les diverses parties de la leçon qu'il a entendue (cet ensemble est ordinairement ce qui offre aux commençans les plus grandes

difficultés), sans le dispenser de répéter les démonstrations et de refaire les calculs du professeur.

Voici la forme que j'ai adoptée dans la composition de ce tableau, et qui m'a paru la plus propre à en rendre l'usage facile et fructueux. Chaque page de numéro pair ou chaque *verso* d'un feuillet contient les formules, les définitions, et le surplus du discours composant le texte; la page de numéro impair, qui forme le *recto* du feuillet suivant, et se trouve *en regard* avec la précédente, est divisée en quatre colonnes, dont la première donne la signification des lettres qui entrent dans les formules, la seconde l'indication des choses définies dans le texte, la troisième et la quatrième les énoncés des théorèmes et des problèmes qui se déduisent de ce qui est dit dans le texte, ou dont les formules donnent la solution. Les articles contenus dans chacune de ces trois dernières colonnes, ont des numéros qui se suivent d'un bout à l'autre de l'ouvrage; tous les numéros sont placés vis-à-vis l'endroit du texte auquel ils se rapportent, et le texte est lui-même divisé en articles numérotés.

Le classement général des matières offre cinq divisions ou *parties*: voici l'indication sommaire de ce que chaque partie contient.

Première Partie. Notions préliminaires, où j'ai rassemblé, sous un seul point de vue, les vérités qui servent de fondement à toutes les théories mécaniques. J'expose d'abord les rapports naturels qui lient la science de l'équilibre et du mouvement à d'autres sciences, dont elle emprunte certaines idées abstraites qu'on peut regarder comme les matériaux primitifs qu'elle emploie et dont je présente le tableau méthodique. Le lecteur connaît ainsi le rang qu'occupe la mécanique dans le système de nos

connaissances, et aperçoit la route qui conduit des premiers résultats du *sentiment* aux conceptions les plus élevées qui ont l'équilibre ou le mouvement pour objet.

Je fais voir ensuite comment, tant la langue scientifique que les théories fondamentales, résultent de l'emploi et des diverses combinaisons des matériaux primitifs dont je viens de parler; au moyen de quoi cette première partie contient tout ce qui est nécessaire pour que les quatre autres n'en soient que des conséquences, des développemens ou des applications.

SECONDE PARTIE. Mécanique des corps solides, contenant la *statique* et la *dynamique*. Les principes posés dans la première, servent dans celle-ci à trouver les conditions de l'équilibre et les phénomènes du mouvement d'un corps ou d'un système de corps. J'ai principalement eu en vue les systèmes de forme invariable, quoique j'y aie donné les formules relatives à l'équilibre du polygone et de la courbe funiculaire, et à celui d'une suite de points matériels juxtaposés. Les recherches qui embrassent de la manière la plus générale l'équilibre et le mouvement d'un système de forme variable, trouveront leur place dans la cinquième partie.

TROISIÈME PARTIE. Mécanique des corps fluides, comprenant l'*hydrostatique* et l'*hydrodynamique*. Cette partie est très-étendue. J'y ai rassemblé et disposé méthodiquement tout ce qu'il est important de connaître, et, même, à peu de chose près, tout ce qu'on connaît de certain sur la mécanique des fluides. Le lecteur remarquera que je ne me suis point borné à une exposition synoptique, dans un très-grand nombre d'articles de la première et sur-tout de la seconde section de cette quatrième

partie ; j'y ai donné des développemens presque aussi étendus que ceux qu'on trouve dans les traités ordinaires ; et, pour le dire en passant, mon livre offre le même avantage par-tout où la difficulté des matières et la clarté l'ont exigé.

La QUATRIÈME PARTIE est entièrement consacrée à des objets de pratique et d'utilité usuelle ; elle renferme l'application de la théorie à l'action des moteurs, à l'équilibre et au mouvement des machines, en faisant entrer en considération les circonstances physiques qui influent sur leur jeu et leur produit, telles que l'adhésion, le frottement, la raideur des chaînes et des cordes, &c. J'ai voulu offrir aux artistes qui n'ont qu'une médiocre connaissance de l'analyse mathématique et de la mécanique, et aux ingénieurs, une suite de règles et de formules, pour leur servir dans tous les cas où ils auront à employer ou à juger un mécanisme quelconque, et en général à appliquer la mécanique aux besoins de la société.

La CINQUIÈME PARTIE renferme ce qu'on peut appeler la mécanique *transcendante :* elle est particulièrement consacrée à faire voir comment on déduit des premiers principes de la science, certaines propositions générales applicables à toutes les questions d'équilibre et de mouvement, et à en présenter les principales conséquences. Ces propositions sont connues sous les noms de *Principe des vîtesses virtuelles ; — Principe général du mouvement* (attribué à D'ALEMBERT) ; — *Conservation du mouvement du centre de gravité ou d'inertie ; — Conservation des aires ; — Conservation des forces vives ; — Principe de la moindre action ;* elles sont rappellées (les deux premières sur-tout) dans un grand nombre d'articles des quatre premières parties de l'ouvrage, où j'ai fait voir leur liaison avec

les principales questions de la mécanique : mais il restait à en faire le rapprochement et à les appliquer à plusieurs problèmes importans et difficiles, tant d'équilibre que de mouvement, que j'avais réservés pour cette cinquième et dernière partie.

TEL est le plan de mon ouvrage. Si le public en retire quelque utilité, c'est à l'établissement de l'École polytechnique qu'il en sera redevable : et j'ai lieu d'espérer que d'autres ouvrages, publiés successivement par les professeurs mes confrères, le mettront à portée de connaître et de juger tout l'ensemble de l'instruction de cette célèbre école *. L'expérience de plusieurs années d'enseignement m'a été fort utile pour faire une classification méthodique des matières, dans laquelle les objets fondamentaux fussent réduits au plus petit nombre possible, placés de manière à n'être pas noyés dans les détails, et à attirer l'attention principale. Je me suis aussi soigneusement attaché à éviter l'inconvénient, malheureusement trop ordinaire, d'employer dans le développement de certaines parties de la science, des notions ou des considérations qui appartiennent aux parties plus avancées. Je crois qu'en général les parties de mon livre qui traitent de l'équilibre, paraîtront neuves à bien des égards : les autres parties offriront aussi plusieurs choses qui, si je ne me trompe, sont nouvelles, ou en elles-mêmes, ou par la manière dont elles sont présentées : c'est au public à en juger ; et quels que soient le mérite et le succès de la *Mécanique philosophique*, le fruit de mes

---

* Le C.en BARRUEL, qui a été professeur de physique à l'École polytechnique, et qui en est l'un des examinateurs, a déjà rempli cette tâche, pour ce qui le concerne, en publiant un ouvrage très-intéressant, intitulé *la Physique réduite en tableaux raisonnés*.

peines ne sera pas perdu ; si la méthode d'exposition que j'y ai suivie est jugée susceptible d'une application utile.

Les principaux ouvrages qui m'ont fourni les matériaux du mien, sont ceux d'EULER, que j'ai principalement mis à contribution dans les articles relatifs au mouvement des corps solides et fluides ; la *Mécanique analytique* de LAGRANGE et la *Mécanique céleste* de LAPLACE, qui m'ont été extrêmement utiles pour la composition de la cinquième partie ; enfin, l'*Hydrodynamique* de BOSSUT, et les Mémoires de COULOMB sur les machines et les moteurs, dont j'ai tiré plusieurs articles des troisième et quatrième parties.

MÉCANIQUE

MÉCANIQUE
PHILOSOPHIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Les sciences sont un des bienfaits de la civilisation, qui a conduit les hommes à l'invention de signes visibles et durables pour représenter et transmettre leurs idées, et qui laissant une partie d'entre eux libres des soins qui tiennent immédiatement à l'existence et à la conservation, leur permet de se livrer entièrement aux *exercices* de l'esprit. Sous ce dernier point de vue, les sciences sont un des fruits les plus précieux de cette admirable division des *travaux* et des *devoirs*, qui, dans une société bien ordonnée, fait concourir une multitude d'efforts vers un but commun, et assure à ceux qui embrassent une partie de ce qu'il faut exécuter ou concevoir pour le bien général, la jouissance, proportionnée à leurs besoins, de ce que les autres conçoivent ou exécutent.

Mais tous les membres du corps social, appelés à ces échanges réciproques des produits de leurs *facultés*, y apportent des degrés très-différens de *puissances* intellectuelles et organiques ; et il est même nécessaire que ces nuances existent pour le maintien et l'harmonie de la société.

Le plus grand nombre des individus, d'après les circonstances qui ont concouru à leur éducation ou établi leur système d'habitudes, n'ont pu ajouter à ce que le *sentiment* et les premiers besoins donneraient à l'homme appelé improprement *homme de la nature* *, que les

* L'état que quelques philosophes ont appelé *état de nature*, ne doit être considéré que comme une manière purement idéale d'envisager l'homme en faisant abstraction de toutes ses

développemens indispensables pour rendre possibles et établir certaines relations entre eux et une partie de leurs concitoyens. Cet état de l'entendement constitue ce qu'on peut appeler l'*intelligence moyenne*, dont l'état varie dans différens âges et chez différens peuples.

Quelques-uns, favorisés par des circonstances et mus par des impulsions particulières, se sont rendus aptes à des conceptions et des travaux d'un ordre plus élevé que ceux dont les hommes ordinaires sont capables, et qui, quoique liés aux besoins et au bonheur communs, y tiennent pâr des chaînes dont les anneaux sont plus ou moins nombreux. Chez eux l'*intelligence moyenne*, perfectionnée et enrichie par l'*étude*, est devenue *philosophie*. Le passage de l'une à l'autre ne peut jamais offrir aucune *solution de continuité*; et parmi les *sciences* dont la *philosophie* se compose, les unes touchent à l'*intelligence moyenne*, d'autres sont contiguës à celles-ci; et ainsi se forment tous les échelons par lesquels on s'élève successivement depuis le *sentiment* jusqu'aux conceptions les plus abstraites.

Dans cet ordre de génération, une science quelconque a toujours pour bases ou matériaux primitifs un certain nombre de notions abstraites ou idées générales qu'elle emprunte ou de l'*intelligence moyenne*, ou des sciences intermédiaires. Les opérations de l'entendement dont ces idées sont le résultat, doivent avoir été faites d'avance chez ceux qui veulent se livrer à l'étude de cette science; et ils y consacreraient inútilement leur temps et leurs peines, sans l'*aptitude* que cette préparation préliminaire donne à leur esprit.

2. Ainsi, dans la science de l'équilibre et du mouvement dont nous allons nous occuper, la première connaissance à donner à l'élève se réduit à lui faire une récapitulation méthodique de celles des idées abstraites auxquelles les exercices antérieurs de son esprit l'ont déjà

---

facultés autres que celles qui tiennent à la conservation et à la reproduction : et en effet, sous quelque point de vue qu'on l'envisage, on ne peut douter, après une analyse fidèle et impartiale, que l'état de société ne soit son état naturel.

conduit, qu'il doit séparer des autres pour les considérer sous un point de vue nouveau et particulier, et en composer diverses agrégations représentées par des signes qui forment les élémens de la langue scientifique. D'après cela, le texte de la première leçon de l'instituteur se trouve dans le tableau suivant, où ces idées abstraites ou matériaux primitifs sont compris et classés :

La Mécanique considère en général....	le temps ;		
	la *force ou puissance*, envisagée quant à ses effets;		
	et les propriétés des corps...	géométriques...	étendue. figure.
		physiques	masse. impénétrabilité. mobilité. inertie.

Les deux premiers élémens sont empruntés de la *métaphysique* ou *idéologie*, qui elle-même les a déduits des premiers produits du *sentiment ;* les six autres sont tirés de la *géométrie* et de la *physique*, qui les tiennent immédiatement de la *métaphysique.*

Au surplus, l'élève a pu, en partant des qualités sensibles des corps, arriver par une infinité de chemins à ces idées générales : on va lui faire suivre la route inverse, mais en l'assujettissant à une marche systématique qui caractérise la science dont il s'occupe, et dirige ses nouvelles méditations vers des recherches applicables aux agrémens ou aux besoins de la société. Dans cette seconde époque, l'art et la méthode viennent s'emparer de l'entendement, et élaborer, pour un but déterminé, des matériaux que la nature, les circonstances, et tout ce qu'on peut appeler l'éducation antérieure, y avaient rassemblés.

3. Pour commencer l'emploi des matériaux primitifs par les rapprochemens les plus faciles à saisir, combinons d'abord ensemble la *mobilité* et le *temps*, et occupons-nous des questions relatives au mouvement isolé d'un point, abstraction faite des causes qui produisent ce mouvement,

et même en ne considérant dans la ligne parcourue que la longueur de cette ligne, sans aucun égard à sa courbure.

4. Nous avons donc uniquement à considérer, dans ce début, les espaces parcourus et les temps qui leur correspondent, ou à comparer des nombres abstraits qui sont les rapports respectifs entre les unités d'espace et de temps et différentes collections de ces unités. On est dans l'usage, pour abréger l'énonciation, de nommer ces rapports, *rapports entre les espaces parcourus et les temps.*

Les diverses lois dont les variations de ces rapports sont susceptibles, produisent une infinité d'espèces de mouvement, et chaque espèce est définie par une équation dans laquelle l'espace parcouru est exprimé par une certaine fonction du temps et de constantes, et réciproquement.

5. Toutes les espèces de mouvement sont comprises dans deux classes générales; savoir :

1.° *Mouvement uniforme ;*

2.° *Mouvement varié.*

6. Le mouvement uniforme est celui dans lequel le temps, croissant par intervalles égaux, les espaces parcourus correspondans croissent aussi par intervalles égaux, c'est-à-dire, dans lequel les différences premières de l'une et l'autre variable sont constantes. Son équation la plus générale est

$$e = E + Vt,$$

équation qui, traduite en lignes, appartient à la ligne droite. E indique la distance de l'origine des espaces à laquelle se trouve le mobile lorsqu'on compte zéro de temps ou lorsque $t = 0$, et V est le nombre d'unités d'espace parcourues pendant chaque unité de temps.

7. Le coëfficient V, qui peut être considéré comme la quantité *caractéristique* du mouvement uniforme auquel il appartient, est ce qu'on appelle la *vîtesse*, qui a en général $\frac{e - E}{t}$ pour valeur. $e - E$ est l'espace parcouru pendant le temps t.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	1. Du sens qu'il faut attribuer à cette expression : *Rapport entre les espaces parcourus et les temps.*		
t = le temps. e = la distance du mobile à l'origine des espaces, au bout de temps t. E et V sont deux coëfficiens constans. $e - E$ = l'espace parcouru pendant le temps t.	2. Du mouvement uniforme.		1. Trouver l'équation du mouvement uniforme. 2. Construire cette équation.
	3. De la vîtesse.	1. Lorsqu'un mobile se meut d'un mouvement uniforme, les espaces qu'il parcourt sont proportionnels aux temps employés à les parcourir, et la *vîtesse* se trouve en divisant l'un de ces *espaces* par le temps qui lui correspond.	3. Donner la signification des coëfficiens qu'elle renferme, et déterminer la vîtesse lorsqu'on connaît le temps employé à parcourir un certain espace.

8. Lorsqu'on a un nombre quelconque de mobiles qui se meuvent d'un mouvement uniforme dans une même ligne droite ou dans une même courbe non fermée, toutes les circonstances de leurs mouvemens absolus ou relatifs se déterminent par la combinaison d'un nombre d'équations de la forme $e = E + Vt$, égal à celui des mobiles; et cette détermination se fait toujours facilement, ou par le calcul, ou par des constructions.

Il suffit même d'avoir une formule générale, calculée pour deux mobiles, qu'on applique ensuite aux rencontres deux à deux d'un nombre quelconque de mobiles; on trouve pour le temps qu'ils emploient à parvenir à une distance K l'un de l'autre,

$$t = \frac{\varepsilon - V_{\prime\prime}\tau \pm K}{V_{\prime} - V_{\prime\prime}}$$

et pour les distances où ils sont alors de l'origine,

$$e_{\prime} = V_{\prime}\frac{\varepsilon - V_{\prime\prime}\tau \pm K}{V_{\prime} - V_{\prime\prime}}$$

$$e_{\prime\prime} = \frac{V_{\prime}(\varepsilon - V_{\prime\prime}\tau) \pm V_{\prime\prime}K}{V_{\prime} - V_{\prime\prime}}$$

Les signes + et — ont lieu respectivement, selon que les mobiles sont à la distance K, après ou avant leur rencontre.

Au point de rencontre, on a $K = 0$; d'où

$$t = \frac{\varepsilon - V_{\prime\prime}\tau}{V_{\prime} - V_{\prime\prime}}; \quad e_{\prime} = e_{\prime\prime} = \frac{V_{\prime}(\varepsilon - V_{\prime\prime}\tau)}{V_{\prime} - V_{\prime\prime}},$$

9. Des équations de même forme, et la théorie analytique qui apprend à trouver leurs solutions en nombre entier, servent à déterminer les circonstances du mouvement tant absolu que relatif, lorsque plusieurs mobiles parcourent uniformément une même courbe fermée; et ce problème est, comme le précédent, susceptible de construction.

Quel que soit le nombre des mobiles; toutes les rencontres de deux quelconques d'entre eux se font à des époques,

$$\frac{(\varepsilon_{\prime\prime} - \varepsilon_{\prime}) + \sigma p}{V_{\prime} - V_{\prime\prime}};$$

et les espaces parcourus correspondans sont

Mobile n.° 1. $\frac{V_{\prime}}{V_{\prime} - V_{\prime\prime}}\left[(\varepsilon_{\prime\prime} - \varepsilon_{\prime}) + \sigma p\right]$

Mobile n.° 2. $\frac{V_{\prime\prime}}{V_{\prime} - V_{\prime\prime}}\left[(\varepsilon_{\prime\prime} - \varepsilon_{\prime}) + \sigma p\right]$.

On suppose $V_{\prime} > V_{\prime\prime}$.

En substituant dans ces formules des nombres entiers positifs quelconques pour σ, on aura autant de solutions de la question qu'on voudra.

Les espaces parcourus se comptent, respectivement, depuis le point de départ de chacun des corps.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$V_{,}$ et $V_{,,}$ sont les vîtesses des deux mobiles; celui qui a la vîtesse $V_{,}$, va à la suite de celui qui a la vîtesse $V_{,,}$; $V_{,} > V_{,,}$. On sait, de plus, par les données du problème, que lorsque $t = \tau$, le mobile qui a la vîtesse $V_{,,}$, est à une distance ε de l'origine des espaces parcourus, origine de laquelle le mobile qui a la vîtesse $V_{,}$, est parti à l'instant où on comptait $t = 0$.	4. De la vîtesse *relative* lorsqu'on considère le mouvement de deux ou de plusieurs points mobiles dans une même ligne.	2. Toutes les circonstances des mouvemens absolus ou relatifs d'un nombre quelconque de points qui se meuvent uniformément, dans une même ligne, soit droite, soit courbe non fermée, ou dans une même courbe fermée, se déterminent par la combinaison d'un certain nombre d'équations de la forme $e = E + V.t$, en appliquant au second cas la théorie analytique qui apprend à trouver des nombres entiers satisfaisant à certaines conditions.	4. Un nombre quelconque de mobiles se mouvant uniformément dans une même ligne droite, trouver, soit par le calcul, soit par des constructions, les instans et les points où ils sont à des distances données les uns des autres, et ceux où ils se rencontrent.
p = le périmètre de la courbe parcourue. $\varepsilon_{,}$, $\varepsilon_{,,}$, $\varepsilon_{,,,}$, &c., sont les distances respectives (plus petites que p) des mobiles à un même point de cette courbe au moment de leur départ, qu'on suppose, pour tous, répondre à $t = 0$.			5. Trouver les mêmes choses lorsque les mobiles parcourent uniformément une courbe fermée.

Ensuite, pour les rencontres 3 à 3, 4 à 4, &c., on aura, en supposant, pour plus de simplicité, $\varepsilon_{,} = 0$, les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{\frac{1}{p}\varepsilon_{,,} + \alpha}{\frac{1}{p}\varepsilon_{,,,} + \beta} &= \frac{V_{,} - V_{,,}}{V_{,} - V_{,,,}} \\ \frac{\frac{1}{p}\varepsilon_{,,} + \alpha}{\frac{1}{p}\varepsilon_{IV} + \gamma} &= \frac{V_{,} - V_{,,}}{V_{,} - V_{IV}} \\ \frac{\frac{1}{p}\varepsilon_{,,} + \alpha}{\frac{1}{p}\varepsilon_{V} + \delta} &= \frac{V_{,} - V_{,,}}{V_{,} - V_{V}} \end{aligned}\right\}$$

&c.

Si l'on a des valeurs entières et positives de α et β, telles que la première équation ait lieu, il y aura rencontre de trois mobiles;

Des valeurs semblables de α, β et γ, qui satisfont aux deux premières équations, indiquent la rencontre de quatre mobiles; et ainsi de suite.

Lorsqu'on a trouvé les valeurs convenables de α, β, γ, &c., pour la rencontre simultanée d'un nombre quelconque de mobiles, le temps qui s'écoule jusqu'à cette rencontre $= \frac{\varepsilon_{,,} + \alpha p}{V_{,} - V_{,,}}$.

10. Le mouvement varié est exprimé, en général, par l'équation

$$e = f(t):$$

le temps étant supposé croître par intervalles de grandeur arbitraire, mais égaux, le mouvement se nomme *accéléré* ou *retardé*, respectivement, suivant que les différences des espaces parcourus correspondans vont en augmentant ou en diminuant; et dans l'une et l'autre hypothèse, il se divise en mouvement *uniformément varié* et mouvement *varié en général*.

11. Les courbes qui représentent le mouvement accéléré ont une propriété commune; il en est de même de celles qui représentent le mouvement retardé (Théorème 4).

12. Cette propriété, et le caractère qui rend le mouvement accéléré, exigent qu'on établisse la notion de la vîtesse dans le mouvement varié en général : un moyen assez simple d'y parvenir, est de considérer la courbe qui a $e = f(t)$ pour équation, comme la limite d'un polygone inscrit, et ce polygone comme le lieu d'un mouvement représenté par une équation de la forme $e = E + Vt$, dans laquelle V est supposé une

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$V_{,}$, $V_{,,}$, $V_{,,,}$, &c., sont les vîtesses respectives des mobiles. α, β, γ, &c., sont des nombres entiers.			
$e =$ l'espace parcouru. $t =$ le temps. f est le signe de fonction.	5. Du mouvement varié. 6. Des mouvemens *accéléré* et *retardé*.	3. La courbe qui est le lieu géométrique d'un mouvement varié, présente sa convexité ou sa concavité à l'axe des temps, selon que le mouvement est accéléré ou retardé.	6. Donner l'équation du mouvement varié en général.

variable qui reçoit des accroissemens ou des diminutions finies à chacun des instans successifs qui correspondent aux angles du poligone.

En effet, la relation des espaces parcourus aux temps, étant $e = f(t)$, on a

$$e' = e + \tau f'(t) + \frac{\tau^2}{2} f''(t + \lambda\tau);$$

et la vîtesse avec laquelle un mobile parcourt uniformément un espace $e' - e$ pendant le temps τ, a pour valeur

$$\frac{e' - e}{\tau} = f'(t) + \frac{\tau}{2} f''(t + \lambda\ ):$$

c'est la vîtesse depuis t jusqu'à $t + \tau$ dans un mouvement qui aurait pour lieu géométrique le polygone circonscrit à la courbe $e = f(t)$, l'un des côtés de ce polygone ayant e et e' pour coordonnées extrêmes. Or, en augmentant indéfiniment le nombre et la petitesse des côtés (e et t étant toujours supposées les coordonnées d'un angle du polygone), on peut faire en sorte que la vîtesse $\frac{e' - e}{\tau}$ ne diffère de $f'(t)$ que d'une quantité aussi petite qu'on voudra; d'où on conclut que la vîtesse dans la courbe a pour valeur

$$f'(t) \text{ ou } \frac{de}{dt}.$$

Cette expression de la vîtesse se déduit aussi de la forme que prend le lieu géométrique des espaces parcourus, dans l'hypothèse où la variation du mouvement vient tout-à-coup à cesser (Théorème 4).

13. Le mouvement uniforme étant celui dans lequel les différences premières des espaces parcourus et des temps sont constantes en même temps, celui qui, dans l'ordre naturel des idées, s'en approche le plus, doit être le mouvement qui, pour les divisions égales du temps, a les différences secondes des espaces parcourus constantes. Cette définition fournit immédiatement l'équation

$$e = E + Vt + \tfrac{1}{2} gt^2,$$

qui représente le mouvement qu'on nomme *uniformément varié.*

14. Les circonstances de ce mouvement peuvent se représenter graphiquement par une parabole apolloniene, que l'on construit par les méthodes connues.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
e' = ce que devient e lorsque t devient $t + \tau$. f', f'', &c. sont les signes de fonction d'après la notation de *Lagrange*.			
		4. Si la variation du mouvement est supposée cesser tout-à-coup, la courbe qui est le lieu géométrique des espaces parcourus, devient une ligne droite tangente à cette courbe, au point correspondant à l'instant où la variation du mouvement a cessé.	
			7. Trouver l'équation la plus générale du mouvement uniformément varié.
	7. Du mouvement uniformément varié.		8. Construire cette équation.

15. Les coëfficiens E, V et g se rapportent à des phénomènes de mouvement particuliers à chaque cas. Ainsi,

16. E exprime, comme dans le mouvement uniforme, le nombre d'unités d'espace parcouru correspondant au zéro de l'axe ou de l'échelle des temps.

La vîtesse à un instant quelconque, a pour valeur

$$v = V + gt.$$

Ainsi le coëfficient V donne la vîtesse initiale; et la vîtesse acquise pendant le temps t, en vertu de la seule accélération, est égale à gt.

17. On voit que dans le mouvement uniformément accéléré, la relation des vîtesses aux temps est la même que celle des espaces parcourus aux temps dans le mouvement uniforme; et on pourrait définir le premier mouvement celui dans lequel les accroissemens de vîtesse sont proportionnels aux temps pendant lesquels ces accroissemens ont lieu; ce qui conduirait à la même équation déduite de la condition que les différences secondes des temps sont constantes.

18. L'espace parcouru pendant le temps τ, dont l'origine est prise à un instant quelconque du mouvement, a pour valeur

$$V\tau + g\tau t + \tfrac{1}{2}g\tau^2;$$

et la partie de cet espace parcourue, en vertu de la seule accélération, est $\frac{1}{2}g\tau^2$, en observant que $V + gt$ est la vîtesse au commencement du temps τ.

La vîtesse acquise pendant le temps τ^2 en vertu de la seule accélération, est $g\tau$ art. 16; et l'espace $g\tau^2$ parcouru pendant le temps τ, en vertu de la vîtesse $g\tau$, est double de $\frac{1}{2}g\tau^2$, espace parcouru en vertu de la seule accélération pendant le même temps.

19. On voit, par ce qui précède, que l'espace parcouru en vertu de la seule accélération, pendant chaque unité de temps, a pour valeur $\frac{1}{2}g$, et que la vîtesse acquise, pareillement en vertu de la seule accélération, pendant la même unité de temps, a pour valeur g: l'une ou l'autre de ces quantités $\frac{1}{2}g$ ou g est donc très-propre à caractériser un mouvement uniformément varié considéré isolément, et à le distinguer de tout autre mouvement de même espèce; on a, en conséquence, donné à la quantité g

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			9. Trouver la vîtesse à un instant quelconque.
v = la vîtesse à un instant quelconque.			10. Trouver la vîtesse initiale.
		5. La vîtesse que le mobile acquiert pendant un temps quelconque en vertu de la seule accélération, est proportionnelle au temps.	11. Calculer la vitesse que le mobile acquiert pendant un temps quelconque, en vertu de la seule accélération.
			12. Trouver l'équation générale du mouvement uniformément accéléré, en définissant ce mouvement, celui dans lequel la vîtesse acquise par l'accélération est proportionnelle au temps.
			13. Trouver l'espace parcouru par le mobile pendant un temps quelconque, dont l'origine coïncide ou non avec celle du mouvement.
		6. L'espace parcouru en vertu de la seule accélération pendant le temps τ, est proportionnel à τ^2.	14. Trouver la partie de l'espace précédent parcourue en vertu de la seule accélération.
		7. L'espace parcouru pendant le temps τ en vertu de la vîtesse que l'accélération seule peut donner pendant ce temps τ, est double de l'espace que l'accélération seule fait parcourir pendant le même temps τ.	
	8. De la *force accélératrice* ou *retardatrice* dans le mouvement uniformément varié.		

un nom particulier, et elle s'appelle *force accélératrice* ou *force retardatrice*, selon que le mouvement uniformément varié est accéléré ou retardé.

Lorsqu'on a construit la courbe qui représente un mouvement uniformément varié quelconque, il est aisé de trouver la longueur de la ligne qui, dans ce mouvement, représente la *force accélératrice* ou la *force retardatrice*.

20. L'ÉQUATION du mouvement uniforme n'est qu'un cas particulier de celle du mouvement uniformément varié, et toutes les deux se déduisent de l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 e}{dt^2} = g,$$

g pouvant être zéro ou une quantité constante quelconque.

21. LES mêmes équations des mouvemens uniformes et uniformément variés, peuvent se déduire de l'intégration de l'équation aux différences finies

$$\frac{\Delta^2 e}{\tau^2} = constante.$$

Mais il faut observer que les intégrales se complètent par des fonctions arbitraires de la forme,

$$\text{fonction}\left[\sin.\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right), \cos.\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right],$$

et que ces intégrales n'offrent les propriétés des mouvemens uniformes et uniformément variés, que dans les suites de valeurs de e, correspondantes à des divisions de t égales à τ ou à un de ses multiples, quel que soit d'ailleurs le point de l'axe des temps où ces divisions commencent; les suites de valeurs de e qui correspondraient à des divisions de t qui ne seraient pas égales à τ ou à un de ses multiples, n'appartiennent point à ces deux mouvemens.

Cette proposition est une conséquence de la théorie que j'ai exposée dans le n.° 26 de mes Feuilles d'Analyse, ou dans le quatrième cahier du Journal de l'École, *page 509*.

22. LE mouvement varié, en général, étant exprimé par l'équation

$$e = f(t),$$

on a l'équation suivante, qui donne le rapport entre les accroissemens

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			15. Étant donnée la courbe qui représente un mouvement uniformément varié quelconque, trouver la longueur de la ligne qui, dans ce mouvement, représente la *force accélératrice* ou *retardatrice*.
		8. L'équation du mouvement uniforme est un cas particulier de celle du mouvement varié.	16. Donner l'équation différentielle dont l'intégrale renferme les équations des mouvemens uniforme et uniformément varié.
t = le temps. e = l'espace parcouru. τ = un nombre donné d'unités de temps, composant une des divisions égales de l'axe des temps. π = la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon.		9. Il y a une infinité d'équations qui, pour certaines divisions du temps, offrent les propriétés des mouvemens uniformes et uniformément accélérés, sans néanmoins appartenir à ces espèces de mouvement. Cette propriété dérive de l'introduction des fonctions révolutives arbitraires, dans les intégrales des équations aux différences finies.	17. Construire l'équation $e = Vt + \sin.\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) + \alpha$, qui offre les propriétés du mouvement uniforme pour les suites de valeurs de e correspondantes à des divisions de t, égales à τ, quel que soit le point de l'axe des temps où ces divisions commencent.

correspondans de l'espace parcouru et du temps,

$$e' = f(t) + \tau f'(t) + \frac{\tau^2}{2} f''(t) + \frac{\tau^3}{2.3} f'''(t + \lambda\tau).$$

La valeur du dernier terme est, d'après le théorème de *Lagrange*,

$$\frac{\tau^3}{2.3} f'''(t + \lambda\tau) = \frac{\tau^3}{2.3} f'''(t) + \frac{\tau^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}(t) + \&.$$

23. Si on prend l'origine de τ pour l'origine du temps, et que l'on considère $f(t)$ ou e comme l'espace parcouru primitif, les mouvemens qui seraient représentés par les équations

$e' = f(t) + \tau f'(t)$ . . . . mouvement uniforme,

$e' = f(t) + \tau f'(t) + \frac{\tau^2}{2} f''(t)$. . mouvement uniformément varié,

ou, en employant l'ancienne notation

$e' = e + \frac{de}{dt}\tau$ . . . . mouvement uniforme,

$e' = e + \frac{de}{dt}\tau + \frac{d^2e}{dt^2} \cdot \frac{\tau^2}{2}$ . . . . mouvement uniformément varié,

seraient, respectivement, parmi tous les mouvemens de même espèce, c'est-à-dire, parmi tous les mouvemens qui ont leurs différences premières ou leurs différences secondes constantes, ceux qui, pendant un certain temps fini, avant et après l'origine de τ, s'approcheraient le plus du mouvement qui a pour équation $e = f(t)$.

$\frac{de}{dt}$ est (art. 12) la vîtesse qui a lieu au commencement de τ ou à la fin de t.

24. $\frac{d^2e}{dt^2}$ est, d'après ce qu'on a dit (art. 19), la *force accélératrice* du mouvement uniformément varié dans lequel le mouvement $e = f(t)$ se transformerait, à compter de l'instant qui termine t ou qui commence τ, si la somme de tous les termes qui empêchent les différences secondes de e d'être constantes, s'évanouissait, ou si on avait $f'''(t + \lambda\tau) = 0$.

Cette propriété et celle énoncée dans l'article précédent, doivent faire regarder $\frac{d^2e}{dt^2}$ comme une quantité *caractéristique* dans un mouvement quelconque, et elle représente ce qu'on nomme dans un mouvement varié, en général, la *force accélératrice*, constante lorsque la variation

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
t = le temps. τ = l'accroissement de t. e et e' sont les espaces respectifs, correspondant à t et à $t + \tau$, c'est-à-dire, sont les distances respectives auxquelles le mobile se trouve de l'origine des espaces, au bout des temps t et $t + \tau$; si le mobile est supposé à une distance E de cette origine, lorsqu'on compte zéro temps, ou lorsque $t = 0$, l'espace qu'il aura effectivement parcouru, pendant le temps t, sera $e - E$. λ = une fraction inconnue et positive. f, f', f'' sont les signes de fonctions d'après la notation de *Lagrange*.	9. De la force accélératrice dans le mouvement varié en général.	10. Les mouvemens qui se déterminent par le problème 18, sont, de tous les mouvemens de même espèce, ceux qui pendant un certain temps fini, avant ou après l'instant auquel se rapporte leur origine, approchent le plus du mouvement qui a $e = f(t)$ pour équation.	18. Trouver les équations du mouvement uniforme et du mouvement uniformément varié, dans lesquels, à partir d'un instant quelconque, le mouvement qui a $e = f(t)$ pour équation, se transformerait si l'on faisait abstraction de tous les termes de l'équation $e' = f(t + \tau)$, qui empêchent respectivement les différences premières ou les différences secondes de e d'être constantes.

est uniforme, et changeant d'un moment à l'autre, lorsque la variation est quelconque.

25. Les formules fondamentales d'un mouvement quelconque, considéré uniquement quant à la relation entre les temps et les longueurs des espaces parcourus, sont, en observant que $\frac{d^2 e}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$,

$$e = f(t);\ v = \frac{de}{dt};\ \varphi = \frac{d^2 e}{dt^2};\ \varphi = \frac{dv}{dt},$$

26. Le mouvement uniforme sert de mesure au mouvement uniformément varié, art. 19; et comme ce dernier sert de mesure au mouvement varié en général, art. 24, c'est, ultérieurement, le mouvement uniforme qui fournit le moyen de comparer tous les autres mouvemens entre eux.

27. Si l'on fait entrer dans les valeurs de e, données art. 23, les 4.e, 5.e, &c. termes du développement de $f(t + \tau)$, on aura les mouvemens à différences 3.e, 4.e, &c. constantes, qui parmi tous ceux de leurs espèces respectives, et pendant un temps fini, après ou avant un instant donné, approchent le plus du mouvement qui a $e = f(t)$ pour équation.

Toute la théorie précédente n'est que celle des osculations de différens ordres, appliquées à des considérations relatives au mouvement.

28. Nous pouvons maintenant ajouter aux idées abstraites du *temps* et de la *mobilité*, celles de la *force* ou *puissance*, de la *masse*, de l'*impénétrabilité* et de l'*inertie*, en faisant encore abstraction de l'*étendue* et de la *figure*.

La nature de cette cause de mouvement, nommée *force* ou *puissance*, nous est tout-à-fait inconnue : l'homme appelle *force* la faculté organique qu'il a de se mouvoir, de s'arrêter, de produire ou de faire cesser le mouvement des corps qui l'environnent; et sans savoir en quoi consiste cette faculté, il a supposé qu'il existait quelque chose de semblable dans les agens physiques qui sont ou qu'il croit être, sur le globe terrestre et dans l'univers, les causes du mouvement de différens corps.

Mais nous n'avons, en mécanique, aucun besoin de connaître la nature de la *force* ou *puissance* qui est représentée, mesurée et introduite, dans le calcul, uniquement par les *effets* qu'elle produit. Ces effets se réduisent toujours à des vîtesses

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
φ = la force accélératrice. v = la vîtesse. e, v et f ont la même signification qu'aux art. 22, 23 et 24.		11. La force accélératrice, pour un instant quelconque, est égale à la vîtesse qu'acquerrait le mobile pendant l'unité de temps, si le rapport $\frac{dv}{dt}$ demeurait constant pendant cette unité.	19. Trouver à quel instant la force accélératrice du mouvement qui a $e = f(t)$ pour équation, est égale à la force accélératrice de la pesanteur; problème qui est résolu par l'équation $f''(t) = g$.
		12. Si dans l'équation $e = f(t)$ on suppose que t augmente de τ, et qu'on développe $f(t+\tau)$, suivant les puissances de τ, les coëfficiens de τ^0, τ^1 et le double du coëfficient de τ^2 seront respectivement l'espace parcouru, la vîtesse, et la force accélératrice au bout du temps t.	20. Trouver les équations des mouvemens, dans lesquels les différences 3.e, 4.e, &c. des espaces parcourus sont constantes, qui, parmi tous les mouvemens de même espèce et à compter d'un instant donné, approchent le plus du mouvement qui a pour équation $e = f(t)$.
La *force accélératrice* de la pesanteur terrestre, au niveau de la mer, sera constamment représentée par la lettre g dans tout le cours de cet ouvrage.	10. De ce qu'on entend par *force* ou *puissance*, et de ce qui doit la représenter dans le calcul d'après les divers effets de cette cause inconnue que nous observons dans la nature.	13. Un corps tombant dans le vide, se meut d'un mouvement uniformément accéléré, dont la *force accélératrice* est 9,809, ou 7,322 mètres, suivant qu'on prend pour unité de temps la seconde sexagésimale, ou la 100000.e partie du jour.	
	11. De la pression et de son évaluation.		

que les puissances ou tendent à donner, ou ont effectivement données à de certaines masses; la loi de *continuité* y est constamment observée. Un corps ne passe pas d'une vîtesse à une autre, sans avoir eu toutes les vîtesses intermédiaires : cependant la transition est souvent si rapide, qu'elle semble être discontinue, et on considère même en mécanique ces changemens *brusques* ou variations *instantanées* et *finies* de la vîtesse : mais ce sont des limites que l'esprit conçoit, et dont les phénomènes réels s'approchent d'autant plus, que le temps correspondant à une augmentation ou diminution finie de vîtesse est plus court.

Parmi les diverses *puissances* que la nature nous offre, il en est une très-remarquable dont il convient de prendre les effets pour terme de comparaison de ceux des autres puissances; c'est la *pesanteur terrestre* à la surface de la terre: son influence sur la vîtesse, en un lieu déterminé, est la même, quelle que soit la masse; tout corps librement soumis à son action, dans le vide, se meut d'un mouvement uniformément accéléré, et reçoit, pendant chaque seconde de temps, une augmentation de vîtesse constante = 9,809 mètres, à la latitude de Paris; la seconde, prise ici pour unité de temps, est celle relative à la division du jour en 24 heures : en prenant la 100000.e partie du jour pour unité de temps, cette vîtesse serait = 7,322 mètres. Je parlerai, dans la suite, des expériences qui ont conduit à ces résultats.

29. J'AI réduit l'effet de la *force* ou *puissance* à des vîtesses qu'elle tend à donner ou qu'elle a effectivement données à de certaines masses : ces deux cas doivent être distingués. Dans le premier cas, l'effort exercé par le corps animé de la puissance, contre l'obstacle qui arrête son mouvement naissant ou prêt à naître, s'appelle *pression* *; et voici comment on déduit de la *pesanteur* la mesure de la *pression*, quelle que soit la nature de la puissance comprimante.

30. ON pose comme principe de fait, 1.° que si plusieurs corps pesans produisent, par leur pesanteur, le même changement dans un autre corps de forme variable qui oppose une résistance constante à ce changement; si, par exemple, suspendus à un même point d'un ressort, fixé par un autre point, ils le font tous plier de la même quantité, les *efforts* verticaux nécessaires pour empêcher que la pesanteur ne donne un mouvement naissant à chacun de ces corps, seront tous égaux; 2.° les

* Il faut appliquer tout ce qu'on va dire de la *pression*, aux *attractions* et *répulsions* qui tendent à produire un mouvement naissant.

efforts nécessaires pour empêcher que la pesanteur ne donne un mouvement naissant à divers volumes d'une matière homogène, sont proportionnels à ces volumes.

31. AVEC ces deux principes, on est en état d'exprimer en nombres le rapport qu'il y a entre une *pression* quelconque, et celle qu'exerce sur un plan horizontal un volume donné d'une matière déterminée homogène et pesante, telle que serait, par exemple, la 1000.e partie d'un mètre cube d'eau distillée, mise à une température convenue; et ce rapport est ce qu'on appelle l'évaluation, en *poids*, de la pression dont il s'agit.

32. PASSANT au second cas, celui où la puissance a produit une vîtesse finie, nous remarquerons d'abord une différence entre la *pesanteur* et d'autres espèces de *puissances*, telles que la force des animaux, celle des ressorts, le choc des fluides, &c., ou même la pesanteur d'un corps grave employée à mouvoir d'autres masses que la sienne propre. Chacun de ces derniers moteurs ne donne pas, en vertu d'une même somme d'efforts, la même vîtesse à une masse quelconque, mais en donne une d'autant plus petite, que la masse à mouvoir est plus grande. C'est à ce principe de fait qu'il faut rapporter la véritable notion de cette propriété de la matière qu'on nomme *inertie*. On verra, avec un peu de réflexion, que ce que j'ai dit art. 28, n'y fait point une exception, en ce que, lorsque la pesanteur change l'état de repos ou de mouvement d'un corps, son action, préexistante dans toutes les parties de ce corps, se proportionne à la quantité de matière sur laquelle elle s'exerce.

33. MAIS il est toujours aisé de comparer la vîtesse acquise en vertu d'une puissance quelconque, à celle que la pesanteur communique soit en faisant parcourir un certain espace, soit au bout d'un certain temps t: v étant une vîtesse produite d'une manière quelconque, les formules

$$v = \sqrt{(2gh)},\ t = \sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)},\ h = \frac{v^2}{2g},\ h = \tfrac{1}{2}gt^2$$

donnent la hauteur h d'où il faudrait qu'un corps tombât verticalement pour acquérir cette vîtesse, et réciproquement, ainsi que le temps t de la chute; h est ce qu'on appelle la *hauteur due à la vîtesse* v.

34. La résistance qu'oppose un corps animé d'une vîtesse à un obstacle qui tendrait à détruire ou à diminuer cette vîtesse, se nomme *choc* ou *percussion*. On trouvera dans la quatrième partie de cet ouvrage, une théorie du choc, où je fais entrer en considération les diverses circonstances physiques qui influent sur ses effets, et où la communication du mouvement, par *percussion*, se trouve comparée à celle produite par la pesanteur. Je me bornerai, en ce moment, à parler du choc qu'exercent les uns contre les autres deux ou plusieurs points matériels qui se meuvent dans une même ligne droite, en leur conservant la propriété qu'on nomme *élasticité*, prise dans ses degrés extrêmes.

35. Pour se faire une idée de cette propriété qui puisse donner sa mesure, imaginons qu'un corps se meuve perpendiculairement à un plan immobile et incompressible; sa vîtesse s'éteindra par la résistance de ce plan, mais suivant que la forme de ce corps, altérée par le choc, se rétablira en tout ou en partie, il reprendra, en sens contraire, ou la totalité, ou une partie de sa vîtesse primitive, et $\frac{v_{\prime}}{v}$ sera la mesure de son élasticité, parfaite lorsque $v_{\prime} = v$, nulle lorsque $v_{\prime} = 0$, ce qui est le cas des corps *mous* et des corps *parfaitement durs*.

36. Comme nous faisons encore abstraction de la *figure* et de l'*étendue*; nous ne considérerons dans le choc des points matériels que l'effet final résultant de l'élasticité, sans nous embarrasser de sa cause, et en en séparant mentalement les phénomènes, relatifs au changement de figure, qui l'accompagnent dans le choc des corps étendus.

Cela posé, si deux corps ou points matériels parfaitement durs, se mouvant dans une même ligne droite, sont dirigés en sens contraire, et que les produits respectifs de leurs masses par leurs vîtesses, produits qu'on nomme *quantités de mouvement*, soient égaux, ces deux corps demeureront immobiles à leurs points de rencontre.

37. Les vîtesses des mobiles peuvent être les vîtesses naissantes imprimées par des puissances; ce qui fournit le moyen d'introduire dans la valeur de la *force motrice*, qui est le produit de la *masse* par la *force accélératrice*, le poids absolu p du corps et la force accélératrice g

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	12. De la *hauteur* due à une *vîtesse*.		
	13. Du choc.		
v = la vîtesse du corps avant le choc. $v_,$ = sa vîtesse après le choc.	14. De l'élasticité.		
		14. Si deux points matériels parfaitement durs se meuvent en sens contraires dans une même ligne droite avec des quantités de mouvement égales, ils demeureront immobiles au point de contact.	
	15. De la *quantité de mouvement*, et de la *force motrice*.		
p = la *force motrice* effective du corps, correspondante à l'incrément de vîtesse dv.			21. Trouver une expression générale de la force *motrice* dans laquelle entre le *poids* absolu du corps, et la *force accélératrice* de la pesanteur terrestre.

de la pesanteur : on a pour cette valeur,

$$f = \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt}, \text{ ou } f = \frac{p}{g} \cdot \frac{d^2 e}{dt^2}.$$

Les circonstances d'un mouvement quelconque sont ainsi rapportées aux phénomènes connus et aux mesures absolues déduites de la chute des graves.

38. ON peut, par le théorème d'équilibre de l'article 36, trouver plusieurs quantités de mouvement équivalentes à une seule, et réciproquement ; la première opération s'appelle *décomposition :* et la seconde, *composition* des quantités de mouvement. Dans ce dernier cas, la force unique cherchée s'appelle *résultante,* et celles que cette force unique peut remplacer se nomment *composantes.* Les mouvemens sont encore supposés dirigés dans une même ligne droite ; et la formule générale qui, dans cette hypothèse, comprend tous les cas de *composition* et de *décomposition*, est, en observant qu'au moment du choc tous les corps doivent être disposés de manière que leur séparation ou la discontinuité du système n'ait pas lieu, $VM - (v'm' + v''m'' + \&c.) = 0$, ou $v_{,}m_{,} + v_{,,}m_{,,} + v_{,,,}m_{,,,}, \&c. - (v'm' + v''m'' + v'''m''' + \&c.) = 0$: $M, m_{,}, m_{,,}$, &c. ont des vîtesses *positives* dirigées dans un même sens, m', m'', &c. ont des vîtesses appelées *négatives,* parce qu'elles sont toutes dirigées dans le sens contraire. Ces équations renferment et les quantités de mouvement données VM ou $v_{,}m_{,} + \&c.$, et celles qu'on veut leur substituer ; toutes ces dernières peuvent être prises arbitrairement, à l'exception d'une seule, qu'on déterminera de manière que l'équation soit satisfaite.

39. LA décomposition dont je viens de m'occuper, fournit une première occasion de parler du principe général de mouvement, attribué à *d'Alembert* (théorème 15), et donne les vîtesses après le choc, de deux points matériels, parfaitement durs ou parfaitement élastiques, qui se meuvent, dans une même ligne droite, avec des *quantités de mouvement* inégales, et de manière à pouvoir se rencontrer. Il faut, dans les formules suivantes, employer les signes supérieur et inférieur, respectivement, suivant que les vîtesses ont le même signe ou des signes contraires ; et posant $V' > V''$, dans le premier cas, ou lorsque les corps vont à la suite l'un

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
V = vîtesse. M = masse. } VM quantité de mouvement donnée. v', v'', v''', &c. } vîtesses. m', m'', m''', &c. } masses. } $v'm' + v''m'' +$ &c., quantités de mouvement à substituer à VM.	16. De ce qu'on entend par vîtesses et quantités de mouvement, *négatives* et *positives*, *composition* et *décomposition* du mouvement, *résultante* et *composantes*, dans le cas ou des points matériels se meuvent ou sont sollicités à se mouvoir dans une même ligne droite.		22. Un point matériel agissant contre un obstacle avec une quantité de mouvement donnée, substituer à son action celle de tant d'autres points massifs qu'on voudra, mus dans la même ligne droite que le point en question, et animés de différentes quantités de mouvement. Résoudre le problème inverse.
		15. Si plusieurs points matériels en repos sont juxtaposés dans une même ligne droite, et qu'au même instant chacun d'eux soit sollicité par une puissance dirigée dans la même ligne droite, décomposer chaque force motrice imprimée, en deux autres dont la	23. Deux points matériels parfaitement durs ou parfaitement élastiques, se mouvant dans une même ligne droite et venant à la rencontre l'un de l'autre avec des masses et des vîtesses données, trouver la vîtesse de chacun d'eux après le choc.

de l'autre, la vîtesse après le choc a pour valeur, dans les états extrêmes d'élasticité,

Corps parfaitement durs. $v' = v'' = \dfrac{V'M' \pm V''M''}{M' + M''}$,

Corps parfaitement élastiques. . $\begin{cases} v' = \dfrac{V'(M' - M'') \pm 2M''V''}{M' + M''} \\ v'' = \dfrac{\mp V''(M' - M'') + 2M'V'}{M' + M''} \end{cases}$.

40. Les solutions de ces premières questions fournissent des conséquences qui tiennent aux grands principes de la mécanique, et dont on ne saurait donner trop à bonne heure des notions exactes ; ces conséquences sont,

1.° L'invariabilité, dans le choc de deux points matériels parfaitement durs, de la vîtesse d'un point dont la distance à un point fixe est à chaque instant $= \dfrac{M'x' \pm M''x''}{M' + M''}$, ce qui répond à la *conservation du mouvement du centre d'inertie ;*

2.° L'invariabilité, dans le choc des corps élastiques de la somme $M'v'^2 + M''v''^2$ des forces vives, qui est constamment égale à la somme primitive $M'V'^2 + M''V''^2$, lorsque les deux corps ne sont sollicités par aucune puissance;

3.° Une propriété commune aux chocs des corps parfaitement durs et parfaitement élastiques, qui consiste en ce que la somme des produits de chaque masse par le carré de la différence entre ses vîtesses avant et après le choc, est un *minimum ;* ce qui répond au principe de *la moindre action.*

Le pendule à oscillations coniques nous fournira bientôt un exemple de l'application du principe des *aires.*

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
Avant le choc, V' = vîtesse, M' = masse } du 1.er corps. V'' = vîtesse, M'' = masse } du 2.e corps. Après le choc, v' = vîtesse de M'. v'' = vîtesse de M''. A un instant quelconque du mouvement, x' = distance de M' à un point fixe pris sur la ligne droite où le mouvement a lieu. x'' = distance de M'' au même point.		première soit celle qui aura effectivement lieu (d'après l'action réciproque des corps les uns sur les autres); la seconde sera telle, que si elle eût été seule imprimée, tout le système serait demeuré en repos. 16. Dans le choc des points matériels parfaitement durs, la vîtesse du point dont la distance à l'origine de x' et x'' est, à un instant quelconque, égale à $\frac{M'x' \pm M''x''}{M' + M''}$, cette vîtesse, dis-je, est la même avant et après le choc, et a pour valeur $\frac{V'M' \pm V''M''}{M' + M''}$.	
	17. De la vîtesse relative.	17. Dans le choc des corps élastiques, la vîtesse relative et la somme des forces vives sont les mêmes avant et après le choc, la vîtesse relative changeant seulement de signe.	
	18. De la force vive.		
	19. De la quantité d'action.	18. La *quantité d'action* consommée dans le choc de deux points matériels parfaitement durs ou parfaitement élastiques, est un *minimum*.	

41. Les phénomènes de la réfraction fournissent une application simple et curieuse du principe de la moindre action.

42. La composition et la décomposition des puissances qui ne sont pas dirigées dans une même ligne droite, se fait avec facilité, lorsqu'on est parvenu à résoudre le cas de deux puissances concourant en un même point.

43. Cette solution fournit le fameux théorème du parallélogramme des forces, qui est le fondement de la solution de toutes les questions d'équilibre qu'on peut proposer.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			24. Étant donnés de position deux points sur un plan, entre lesquels passe une ligne droite donnée aussi de position; si un corps va du premier point à la ligne avec une vîtesse uniforme donnée, et ensuite de la ligne au second point avec une autre vîtesse uniforme donnée, trouver le point de la ligne où le corps doit la rencontrer pour que sa quantité d'action soit un *minimum*. 25. Appliquer la solution du problème précédent aux phénomènes de la réfraction.
	20. Des *composantes* et des *résultantes* dans le cas où les directions des puissances ne sont pas dans la même ligne droite.	19. Si la puissance unique ou *résultante* dont la recherche fait l'objet du problème 26, est appliquée dans une direction contraire, elle annullera l'effet des deux composantes, de manière que les trois puissances se feront équilibre.	26. Deux puissances dont les directions font un angle quelconque entre elles, agissant sur un même point matériel, trouver une puissance unique qui, appliquée à ce point, lui donne le même mouvement que les deux composantes.
		20. Les deux composantes mentionnées au théorème précédent étant représentées par les deux côtés d'un parallélogramme, lesquels côtés feraient entre eux un angle égal à	

44. On déduit de ce théorème un grand nombre de conséquences, dont les principales sont consignées dans les théorèmes ci à côté.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		celui formé par les directions de ces composantes, la résultante sera représentée par la diagonale de ce parallélogramme.	
		21. Chacune des puissances sus-mentionnées, est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.	
		22. Si on forme un triangle de trois lignes perpendiculaires, respectivement, aux trois directions des puissances sus-mentionnées, chacune de ces puissances sera proportionnelle au côté du triangle qui est perpendiculaire à sa direction.	
		23. Les trois puissances sus-mentionnées et les angles formés par leurs trois directions, forment six quantités, dont trois se calculent par les trois autres, au moyen des méthodes trigonométriques qu'on applique aux trois côtés et aux trois angles d'un triangle.	
		24. L'une quelconque des trois puissances en équilibre sur un point, peut être regardée comme *résultante* et les deux autres comme *composantes*.	

45. Une des applications les plus utiles du principe de la composition et de la décomposition des forces, est de décomposer une force appliquée à un point, en trois forces respectivement parallèles à trois axes perpendiculaires entre eux.

46. Cette décomposition est d'un usage continuel dans la mécanique; et sa grande utilité vient principalement de l'indépendance qui existe entre les actions de chaque groupe de forces parallèles, indépendance qui permet de considérer séparément les équations de l'équilibre ou du mouvement pour chacun de ces groupes. Nous nous en sommes d'abord servis pour obtenir les équations d'équilibre d'un point matériel sollicité par des puissances quelconques. Ces équations sont au nombre de trois; savoir:

Conditions de l'équilibre, parallèlement à l'axe des

$$\begin{cases} x \ldots P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''' + \&c. = 0 \\ y \ldots P' \cos.\beta' + P'' \cos.\beta'' + P''' \cos.\beta''' + \&c. = 0 \\ z \ldots P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' + P''' \cos.\gamma''' + \&c. = 0. \end{cases}$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		25. D'un point pris à volonté sur la direction de l'une quelconque P des trois puissances P, Q, R en équilibre sur un point, menez des perpendiculaires sur les directions des deux autres puissances Q et R, et joignez par une ligne droite les pieds de ces deux perpendiculaires; si cette dernière ligne est supposée représenter la puissance P, la puissance Q sera représentée par la perpendiculaire sur la direction de R, et la puissance R par la perpendiculaire sur la direction de Q.	
			27. Décomposer une puissance en trois autres parallèles à trois axes coordonnés, perpendiculaires entre eux.
			28. Trouver les équations qui expriment qu'un point matériel sollicité par des puissances quelconques, est en équilibre.
x, y et z coordonnées du point matériel auquel les puissances sont appliquées. P', P'', &c. puissances qui font respectivement avec les axes des x, y et z, des angles α', β', γ'; α'', β'', γ''; &c.			

47. L'UNE quelconque de ces trois équations exprime que le point matériel est à une distance invariable du plan coordonné perpendiculaire à l'axe auquel cette équation se rapporte ; condition qui peut avoir lieu sans que les deux autres équations soient satisfaites. De même deux de ces équations peuvent être satisfaites, sans que la troisième le soit ; ce en quoi on voit, dès l'abord, le grand avantage de cette manière de décomposer les forces.

48. SI toutes les puissances agissent dans un même plan parallèle au plan x, y, les équations d'équilibre se réduisent à deux, qui sont,

$$P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + P''' \cos. \alpha''' + \&c. = 0,$$
$$P' \sin. \alpha' + P'' \sin. \alpha'' + P''' \sin. \alpha''' + \&c. = 0.$$

49. LORSQUE les puissances appliquées à un point matériel ne se font pas équilibre, on peut, au moyen des équations suivantes, trouver la direction et la quantité d'une nouvelle puissance qui, appliquée au point matériel, avec les précédentes, établisse l'équilibre :

$$P = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}; \cos. \alpha = \frac{X}{P}; \cos. \beta = \frac{Y}{P}; \cos. \gamma = \frac{Z}{P},$$

et les équations des projections de la direction de la résultante sont,

$$y - y' = \frac{Y}{X}(x - x'); \qquad z - z' = \frac{Z}{X}(x - x').$$

50. SI toutes les puissances agissent dans un même plan parallèle à celui des x, y, on déduit des équations précédentes,

$$P = \sqrt{(X^2 + Y^2)}; \cos. \alpha = \frac{X}{P}; \sin. \alpha = \frac{Y}{P}; \text{tang.} \alpha = \frac{Y}{X},$$

et un point quelconque de la direction de P est donné par l'équation

$$y - y' = \frac{Y}{X}(x - x').$$

51. LA force P, déterminée par le problème précédent, étant appliquée dans une direction contraire, pourra remplacer toutes les forces P', P'', &c., c'est-à-dire qu'elle sera leur *résultante*. En général, lorsqu'un nombre quelconque de puissances est en équilibre sur un point matériel, l'une quelconque de ces puissances peut être considérée comme la résultante de toutes les autres.

52. ON peut se proposer de substituer aux puissances P', P'', &c., trois puissances F', F'', F''', qui feraient avec les axes des x, y et z, des angles.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		26. L'une quelconque des trois équations d'équilibre d'un point matériel peut avoir lieu séparément, sans que les autres aient lieu ; deux de ces équations peuvent aussi être satisfaites ensemble sans que la troisième le soit.	29. Trouver ce que deviennent ces équations lorsque toutes les puissances agissent dans un même plan.
P = résultante. α, β et γ sont les angles formés par la direction de P et par chacun des axes des x, y et z respectivement. $X = P' \cos. \alpha' + \&c.$ $Y = P' \cos. \beta' + \&c.$ $Z = P' \cos. \gamma' + \&c.$ x', y' et z' sont les coordonnées du point commun d'application des puissances. x, y et z sont les coordonnées d'un point quelconque de la direction de la résultante.			30. Trouver la valeur et la direction d'une puissance qui fasse équilibre à un nombre quelconque d'autres puissances appliquées à un point matériel. 31. Appliquer la solution du problème précédent au cas où toutes les puissances agissent dans un même plan.
		27. La puissance P déterminée par les problèmes 30 et 31, étant appliquée dans une direction contraire, devient la résultante des puissances P', P'', &c. ; et en général, lorsque des puissances sont en équilibre sur un point, l'une quelconque d'entre elles peut	32. Substituer à des puissances en nombre et quantités quelconques

donnés dont les cosinus seraient respectivement a', a'', a''' ; b', b'', b''' ; c', c'', c''' ; et on aura les valeurs de ces puissances par les équations suivantes :

$$F' = \frac{X(b''c''' - c''b''') + Y(c''a''' - a''c''') + Z(a''b''' - b''a''')}{a'(b''c''' - c''b''') + b'(c''a''' - a''c''') + c'(a''b''' - b''a''')}$$

$$F'' = \frac{X(b'c''' - c'b''') + Y(c'a''' - a'c''') + Z(a'b''' - b'a''')}{a''(b'c''' - c'b''') + b''(c'a''' - a'c''') + c''(a'b''' - b'a''')}.$$

$$F''' = \frac{X(b''c' - c''b') + Y(c''a' - a''c') + Z(a''b' - b''a')}{a'''(b''c' - c''b') + b'''(c''a' - a''c') + c'''(a''b' - b''a')}.$$

53. Si les puissances P', P'', &c., agissent dans un même plan parallèle à celui des x, y, les forces cherchées doivent aussi agir dans le même plan, et les équations précédentes se réduisent à

$$F' = \frac{b''X - a''Y}{a'b'' - a''b'}; \quad F'' = \frac{a'Y - b'X}{a'b'' - a''b'}; \quad F''' = 0.$$

54. Les équations d'équilibre d'un point matériel (art. 46), et celles pour trouver la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à ce point, fournissent une construction curieuse, au moyen de laquelle on peut ou vérifier l'équilibre, ou trouver la résultante de toutes les puissances, s'il n'y a pas équilibre. (Théorème 28.)

55. Voici d'autres conséquences des équations de l'art. 46, qui sont d'une très-grande importance.

Si par le point sur lequel agissent des puissances en nombre et de quantité et direction quelconques, supposées en équilibre, on mène une ligne droite de direction et de longueur absolument arbitraires ; en multipliant les 1.re, 2.e et 3.e équations de l'art. 46, respectivement, par ρ cos. α, ρ cos. β, ρ cos. γ, et faisant la somme des produits, on parviendra à l'équation unique

$$P'\rho\cos.\theta' + P''\rho\cos.\theta'' + P'''\rho\cos.\theta''' + \&c. = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Lorsque les directions des puissances et la ligne ρ sont toutes dans un même plan, parallèle au plan xy, en multipliant les 1.re et 2.e équations de l'art. 48, respectivement, par ρ sin. α et ρ cos. α, et prenant la différence des produits, on a immédiatement

$$P'\rho\sin.\theta' + P''\rho\sin.\theta'' + P'''\rho\sin.\theta''' + \&c. = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Pour avoir les signes de sin. θ' et cos. θ', il faut, dans le plan qui passe par la ligne ρ et par la direction de P', concevoir un arc de cercle dont le centre

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		être regardée comme la résultante de toutes les autres.	qui agissent sur un point matériel, trois puissances qui aient des directions données.
			33. Appliquer la solution du problème précédent, au cas où les directions des puissances sont dans un même plan.
ρ est la longueur arbitraire de la ligne droite menée par le point commun des puissances en équilibre. α, β et γ sont les angles respectifs que la direction de ρ fait avec les axes des x, y et z. θ', θ'', θ''', &c. sont les angles respectifs que la direction de ρ fait avec les directions des puissances P', P'', &c. On a $\cos. \theta' = \cos. \alpha \cos. \alpha' + \cos. \beta \cos. \beta' + \cos. \gamma \cos. \gamma'$; et ainsi des autres angles.		28. Un point étant sollicité par des puissances en nombre, directions et quantités quelconques, si l'on construit un polygone dont les côtés, qui se trouveront en général dans des plans différens, soient respectivement proportionnels à ces puissances et parallèles à leurs directions, ces côtés se succédant dans un ordre quelconque (il faut, dans leur succession, avoir égard au sens dans lequel agit chaque puissance), et le premier commençant au point de concours des puissances, la distance entre ce point de concours et l'extrémité du dernier côté, représentera en quantité et en direction la résultante de toutes les puissances.	

soit au point commun d'application des puissances, l'origine sur la ligne ρ, et qui se termine à un point de la direction de P', vers lequel cette puissance P' tende à pousser le point commun d'application : la valeur angulaire de cet arc de cercle sera la valeur positive de θ' : et ainsi des autres angles θ'', θ''', &c.

56. D'où on conclut les deux équations remarquables,

$$P'\Delta p' + P''\Delta p'' + \&c. = 0\,; \quad P'dp' + P''dp'' + \&c. = 0.$$

Les produits $P'dp'$, $P''dp''$, &c. ont été nommés les *momens* des puissances P', P''; et l'égalité à zéro de la somme de ces momens, qui a lieu, non-seulement pour un point, mais pour un système quelconque en équilibre, constitue ce qu'on appelle le principe des *vîtesses virtuelles.*

Les lignes p', p'', &c. qui se terminent au point d'application des puissances, ont leurs origines à des distances arbitraires de ce point, sur les directions des puissances auxquelles ces lignes se rapportent respectivement, placées de telle manière que nommant A le point d'application et a l'origine de l'une quelconque des lignes p', p'', &c., la puissance dirigée dans la ligne aA agit dans le sens aA. Cette convention établie, on donnera des signes différens à dp', dp'', &c., ou à $\Delta p'$, $\Delta p''$, &c., suivant que ces incrémens seront en augmentation ou en diminution de p', p'', &c.; et cette règle n'est qu'une énonciation particulière de celle donnée à la fin de l'art. 55.

57. La formule $P'\Delta p' + \&c. = 0$, ou l'équation (1) de l'art. 55, donne le théorème 30; et en considérant ainsi une sphère qui passe par le point d'application des puissances, on a un moyen facile d'assigner aux termes de ces équations les signes respectifs qu'ils doivent avoir, en distinguant les puissances qui tendent à pousser le point d'application au-dedans de la sphère, de celles qui tendent à produire l'effet contraire; les termes relatifs aux premiers ayant le signe positif, ceux relatifs aux dernières doivent avoir le signe négatif, ou réciproquement.

58. L'équation (2) de l'art. 55, fournit les théorèmes 31 et 32: on pourra suppléer à la règle des signes, donnée à la fin de l'art. 55, en concevant un cercle, tracé dans le plan des forces, tangent à la ligne ρ au point commun d'application de ces forces, et en donnant,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$\Delta p'$, $\Delta p''$, &c. sont les projections respectives de la ligne ρ sur les directions des puissances P', P'', &c. dp', dp'', &c. sont les projections respectives, sur les mêmes directions, de la ligne ρ supposée infiniment petite.	21. De ce qu'on entend par le principe des *vîtesses virtuelles*, et par le mot *moment*, considéré quant à l'application de ce principe.	29. Le principe des *vîtesses virtuelles* a lieu dans l'équilibre d'un point matériel sollicité par des puissances de quantités et directions quelconques. 30. Si du point de concours de plusieurs puissances en équilibre, on mène une ligne droite de grandeur et de direction arbitraires, et que sur cette ligne comme diamètre, on construise une sphère, la somme des produits de chaque puissance par la partie de sa direction comprise au-dedans de la surface sphérique, est égale à zéro, en prenant les signes des produits de la manière indiquée art. 57. 31. Plusieurs puissances, dirigées dans un même plan, sur un point unique, étant en équilibre; si d'un autre point pris dans le même plan, on	

respectivement, des signes contraires aux termes relatifs aux forces qui tendent à pousser ce point ou en dedans ou en dehors du cercle.

59. La somme de tous les produits $P'p$ sin. θ', &c., art. 55, équation (2), est ce qu'on appelle communément *somme des momens,* expression qu'il faut distinguer de celle dont la définition 21.e donne le sens. Le lecteur verra par l'article cité, que la manière dont je démontre les propositions fondamentales de la théorie des momens, en même temps qu'elle est nouvelle, réunit la simplicité à la généralité, et a l'avantage de se déduire immédiatement du principe des *vîtesses virtuelles*, dont elle n'est pour ainsi dire qu'une énonciation particulière.

Les auteurs de différens traités de mécanique, publiés depuis un siècle, font un grand usage de la théorie des *momens* pour déterminer une partie des conditions de l'équilibre des systèmes étendus et figurés; mais la manière dont ils l'emploient, introduit dans les équations d'équilibre la considération du mouvement de rotation, ou de la tension à ce mouvement; et j'ai voulu éviter un rapprochement pareil, qui embarrasse toujours les commençans, et jette même, dans leur esprit, quelques nuages sur la rigueur des démonstrations.

Voici, pour remplir ce but, un moyen de parvenir aux équations d'équilibre d'un système *étendu* et *figuré*, qui me semble nouveau, et qui réunissant à beaucoup de simplicité et de rigueur, l'avantage de dispenser d'avoir en mécanique une théorie des *momens* particulière et séparée, rend ainsi les premières études moins pénibles et plus profitables.

60. L'*ÉTENDUE* et la *figure* sont deux des idées abstraites consignées dans le tableau de l'article 1, que je n'avais point encore fait entrer en considération, ne m'étant occupé que de l'équilibre et du mouvement d'un point matériel. Je les réunis maintenant à la *force*, la *masse*, l'*impénétrabilité* et l'*inertie*, faisant abstraction du *temps* lorsque je ne traiterai que les questions d'équilibre.

De plus, je ne m'occuperai, en premier lieu, que d'un système de points matériels renfermés dans un même plan où se trouvent aussi les directions des forces, les distances respectives de ces points matériels étant supposées invariables, et leur système étant *libre*, c'est-à-dire, n'ayant aucun de ses points assujetti, ou à une position absolue dans l'espace, ou à se mouvoir sur une ligne ou une surface.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	22. Des *momens*, dans l'acception que les auteurs qui ont écrit sur la mécanique donnent le plus communément à ce mot.	mène des perpendiculaires sur les directions de toutes ces puissances, la somme des *momens*, ou des produits de chaque puissance par les perpendiculaires menées sur leurs directions respectives, est égale à zéro, en prenant les signes des produits de la manière indiquée art. 58. 32. Lorsque plusieurs puissances qui agissent dans un même plan, sont appliquées à un point unique, la somme de leurs momens par rapport à un autre point quelconque situé dans le même plan, est égale au moment de leur résultante, par rapport au même point. 33. Une force qui agit sur un corps ou sur un système de points matériels liés entre eux, peut être censée appliquée à un point quelconque de sa direction. *Art. 61.*	34. Vérifier l'équilibre, lorsqu'il existe, ou, s'il n'existe pas, trouver, par des compositions successives, la résultante de tant de puissances qu'on voudra, dirigées dans un même plan où se trouve un système de points matériels, à distances invariables, auxquels ces puissances sont appliquées. *Art. 61.* 35. Trouver les équations d'équilibre d'un système de trois points matériels à distances invariables, sollicités chacun par une puissance qui est dirigée dans le plan où les trois points sont placés. *Art. 63.* 36. Appliquer la solution du problème précédent au cas où les trois forces ont des directions parallèles. *Art. 64.*

61. QUELLE que soit la forme et la direction de ce système, si l'on fait attention qu'une force peut être censée appliquée à un point quelconque de sa direction, il sera toujours possible, en employant des constructions géométriques, de composer successivement, deux à deux, les puissances ou leurs résultantes, jusqu'à ce qu'on parvienne à une résultante unique, qui sera égale à zéro dans le cas de l'équilibre.

62. MAIS pour exprimer analytiquement les conditions de cet équilibre, supposons d'abord que le système est composé de trois points sollicités chacun par une puissance; puisque, art. 60, on se donne la condition que les forces agissent dans le plan qui renferme ces points, ce qui reste à faire pour établir l'équilibre du système, consiste à énoncer, 1.° que les directions des forces concourent en un point unique qui pourra être regardé comme leur point commun d'application; 2.° qu'elles peuvent se réduire ou à deux forces, ou à deux couples de forces égales et agissant en sens contraire.

63. VOICI le précis de l'analyse qui conduit aux équations par lesquelles ces conditions s'expriment: P', P'', P''' étant les puissances, p', p'', p''' les perpendiculaires abaissées de l'origine sur leurs directions, et α', α'', α''' les angles formés par ces directions et par l'axe des x, on a d'abord les équations (1)... $\frac{p'}{p''} = \frac{\sin.(\alpha' - \theta)}{\sin.(\alpha'' - \theta)}$; et (2)... $\frac{p'}{p'''} = \frac{\sin.(\alpha' - \theta)}{\sin.(\alpha''' - \theta)}$, qui énoncent que les trois directions se coupent en un point commun, placé sur une ligne faisant un angle θ avec l'axe des x. Ensuite les équations (3)... $P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''' = 0$; et (4)... $P' \sin.\alpha' + P'' \sin.\alpha'' + P''' \sin.\alpha''' = 0$, déduites de celles de l'art. 48, énoncent que les composantes parallèles aux x et aux y, sont respectivement égales et de signes contraires: on tire de ces deux dernières équations, $\cos.\theta\,(P' \sin.\alpha' + P'' \sin.\alpha'' + P''' \sin.\alpha''') - \sin.\theta\,(P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''') = 0$, ou (5)... $P' \sin.(\alpha' - \theta) + P'' \sin.(\alpha'' - \theta) + P''' \sin.(\alpha''' - \theta) = 0$; et éliminant $\sin.(\alpha'' - \theta)$ et $\sin.(\alpha''' - \theta)$, au moyen des équations (1) et (2), on a, (6)... $P'p' + P''p'' + P'''p''' = 0$; les équations (5) et (6) remplacent celles (1) et (2), et toutes les conditions qu'on voulait exprimer, sont renfermées dans les équations (3), (4), (5) et (6); mais (5), qui est vérifiée par (3) et (4), n'ajoute rien à ce que disent les équations (3) et (4), donc ces conditions sont complétement et rigoureusement

énoncées par les trois équations *,

$$P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''' = 0$$
$$P' \sin.\alpha' + P'' \sin.\alpha'' + P''' \sin.\alpha''' = 0$$
$$P' p' + P'' p'' + P''' p''' = 0$$

---

* Il est aisé de voir pourquoi les équations $\frac{p'}{p''} = \frac{\sin.(\alpha' - \theta)}{\sin.(\alpha'' - \theta)}$ et $\frac{p'}{p'''} = \frac{\sin.(\alpha' - \theta)}{\sin.(\alpha''' - \theta)}$ expriment que les directions de P', P'' et P''' se rencontrent, au même point, sur une ligne faisant un angle θ avec l'axe des x; la distance, prise sur cette ligne, de l'origine au point commun d'intersection, est l'hypothénuse, pareillement commune aux trois triangles rectangles dont les autres côtés sont p', p'', p''', qui se coupent à l'origine, et les parties des directions de P', P'' et P''' comprises entre l'intersection commune de ces directions et p', p'' et p'''. Or, lorsque des triangles rectangles ont ainsi une hypothénuse commune, les côtés qui aboutissent à une des extrémités de cette hypothénuse, sont entre eux comme les sinus des angles qui ont leurs sommets à l'autre extrémité, et c'est ce qu'expriment les deux équations ci-dessus.

Si dans cette équation on développe sin. $(\alpha' - \theta)$, sin. $(\alpha'' - \theta)$ et sin. $(\alpha''' - \theta)$ et qu'on prenne les valeurs de $\frac{\sin.\theta}{\cos.\theta}$, ou tang. θ, données par chaque équation, on aura tang. $\theta = \frac{p''\sin.\alpha' - p'\sin.\alpha''}{p''\cos.\alpha' - p'\cos.\alpha''}$; et tang. $\theta = \frac{p'''\sin.\alpha' - p'\sin.\alpha'''}{p'''\cos.\alpha' - p'\cos.\alpha'''}$: faisant passer par l'origine une ligne qui fasse avec l'axe des x l'angle dont on vient de calculer la tangente, et portant sur cette ligne, à compter de l'origine, une longueur égale à l'une des trois valeurs $\frac{p'}{\sin.\theta'}$, $\frac{p''}{\sin.\theta''}$ ou $\frac{p'''}{\sin.\theta'''}$, le point commun d'intersection sera à l'extrémité de cette longueur.

Si l'on égale les deux valeurs de tang. θ, on énoncera que l'intersection de p' et p'' et celle de p' et p''' se trouvent sur une même ligne, faisant un angle θ avec l'axe des x; on exprimera donc, par une seule équation, que ces deux intersections coïncident ou que les trois lignes se rencontrent. Formant l'égalité dont je viens de parler, et réduisant au même dénominateur, on trouve $0 = p'(\sin.\alpha''\cos.\alpha''' - \cos.\alpha''\sin.\alpha''') - p''(\sin.\alpha'\cos.\alpha''' - \cos.\alpha'\sin.\alpha''') + p'''(\sin.\alpha'\cos.\alpha'' - \sin.\alpha''\cos.\alpha')$, ou $0 = p'\sin.(\alpha'' - \alpha''') - p''\sin.(\alpha' - \alpha''') + p'''\sin.(\alpha' - \alpha'')$ . . . (A).

Je vais dire un mot d'une autre manière de démontrer très-simplement les équations d'équilibre de l'art. 63, en se les donnant *à priori*, et prouvant qu'elles satisfont aux conditions énoncées dans l'article cité. Pour cela, on rapportera les angles α', α'' et α''' à une ligne passant par un point de position arbitraire, dans le plan où agissent les forces (point qui sera l'origine de p', p'' et p'''), et par l'intersection des directions de deux de ces forces, savoir, P' et P''. Nommant a la distance du point arbitraire à ce point d'intersection; et x la distance du même point arbitraire à celui de rencontre entre la ligne a et la direction de P''', la troisième équation $P'p' + P''p'' + P'''p''' = 0$ se changera en $P'a\sin.\alpha' + P''a\sin.\alpha'' + P'''\alpha\sin.\alpha''' = 0$: mais l'équation $P'\sin.\alpha' + P''\sin.\alpha'' + P'''\sin.\alpha'''$ donne $P'\sin.\alpha' + P''\sin.\alpha'' = -P'''\sin.\alpha'''$, valeur qui, introduite dans l'équation entre x

qui, dans le cas d'équilibre, ont lieu, quelles que soient, dans le plan des forces, l'origine de p', p'', p''' et la ligne à laquelle se rapportent les angles α', α'' et α'''.

64. La troisième de ces équations est la même que celle qu'on déduit ordinairement du théorème 31 des *momens* : mais on voit qu'elle n'est introduite ici que par des considérations purement géométriques relatives aux directions des forces. Or, lorsqu'on a les équations d'équilibre de trois forces agissant dans un même plan, on en déduit, sans avoir recours à aucune autre considération, celle de l'équilibre d'un nombre quelconque de forces agissant aussi dans un même plan, art. 71 et 72. De plus, l'hypothèse du parallélisme des directions réduit les trois équations de l'article précédent à deux; $P' + P'' + P''' = 0$, $P'p' + P''p'' + P'''p''' = 0$, qui assurent l'équilibre, lorsqu'on sait d'ailleurs ou qu'on pose pour condition que les forces agissent dans le même plan : mais, si le parallélisme des forces est la seule condition donnée *à priori*, alors, pour établir l'équilibre, il faut énoncer ces deux autres conditions; savoir, 1.° que les trois forces parallèles agissent dans un même plan; 2.° que leurs quantités, eu

---

et a, donnera $x = a$. Ainsi il résulte de la coexistence des équations $P'p' + P''p'' + P'''p''' = 0$, et $P' \sin.\alpha' + P'' \sin.\alpha'' + P''' \sin.\alpha''' = 0$, que les directions des trois forces se rencontrent au même point; et en y réunissant l'équation $P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''' = 0$, on énoncera toutes les conditions demandées. Il ne faut pas perdre de vue qu'en disant que les deux dernières équations ont lieu par rapport à une ligne particulière, située dans le plan où agissent les forces, on dit que des équations de même forme ont lieu par rapport à toutes les lignes situées dans le même plan.

Pour réunir dans cette note tout ce qui est relatif aux équations fondamentales d'équilibre, je la terminerai par la démonstration de celles qui se rapportent aux forces parallèles. Je pose pour condition unique, que trois forces P', P'' et P''' ont des directions parallèles entre elles et à l'axe des z, rencontrant le plan xy en des points dont les coordonnées sont respectivement x', y'; x'', y''; x''', y''': les équations qui exprimeront que ces trois forces se font équilibre, doivent énoncer, 1.° que leurs directions sont dans le même plan, ou que leurs points de rencontre avec le plan xy sont dans une même ligne droite; 2.° qu'elles satisfont aux conditions établies, art. 64, pour les distances entre les directions de trois forces parallèles qui agissent dans le même plan, conditions déduites de l'art. 63. Or, toutes ces choses sont dites dans les trois équations $\frac{x'' - x'}{y'' - y'} = \frac{x''' - x'}{y''' - y'} \ldots (1)$; $P''\sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2]} + P'''\sqrt{[(x''' - x')^2 + (y''' - y')^2]} = 0 \ldots (2)$; $P' + P'' + P''' = 0 \ldots (3)$; la seconde donne $P''(x'' - x')\sqrt{[1 + (\frac{y'' - y'}{x'' - x'})^2]}$ $+ P'''(x''' - x')\sqrt{[1 + (\frac{y''' - y'}{x''' - x'})^2]} = 0$, et $P''(y'' - y')\sqrt{[1 + (\frac{x'' - x'}{y'' - y'})^2]}$ $+ P'''(y''' - y')\sqrt{[1 + (\frac{x''' - x'}{y''' - y'})^2]} = 0$, qui, combinées avec l'équation (1), donnent $P''(x'' - x') + P'''(x''' - x') = 0$; $P''(y'' - y') + P'''(y''' - y') = 0$. Ces dernières, qui résultent des équations (1) et (2), peuvent les reproduire et les repré-

égard aux sens dans lesquels elles agissent, et les distances entre leurs directions, satisfont aux deux équations précédentes : et ces deux dernières conditions sont énoncées par les trois équations de l'article 76 (*Voyez la note de l'article 63*), desquelles je déduis ensuite, art. 77 et 78, les équations d'équilibre d'un nombre quelconque de forces à directions parallèles, agissant dans des plans quelconques, qui se trouvent ainsi liées à celle de l'article précédent.

65. En combinant les équations d'équilibre des forces agissant dans le même plan, avec les équations d'équilibre des forces parallèles agissant dans des plans quelconques, on obtient, art. 134, 135 et suivans, les conditions de l'équilibre des forces de quantités et directions quelconques; au moyen de quoi tout ce qui concerne les systèmes *libres* se trouve déduit des considérations et des équations des art. 62, 63 et 64. Les cas d'équilibre des systèmes assujettis à tourner autour de points ou de lignes fixes, s'en déduisent également, puisqu'ils se

---

senter, et expriment par conséquent avec l'équation (3), toutes les conditions de l'équilibre des trois forces parallèles; si l'on ajoute à chacune de ces dernières, respectivement, $x'(P' + P'' + P''')$ et $y'(P' + P'' + P''')$, quantités nulles par elles-mêmes, en vertu de l'équation (3), les équations d'équilibre des trois forces parallèles seront, en ne se donnant *à priori* d'autre condition que celle de leur parallélisme,

$$P' + P'' + P''' = 0\,;\quad P'x' + P''x'' + P'''x''' = 0\,;\quad P'y' + P''y'' + P'''y''' = 0.$$

Si les forces parallèles faisaienr avec le plan xy un autre angle que l'angle droit, on les décomposerait chacune en trois, respectivement parallèles aux trois axes coordonnés, dont deux agiraient dans le plan xy; et au moyen de ce qui précède et des formules de l'art. 70, on aurait sept équations pour établir l'équilibre des trois groupes; mais trois de ces équations seraient de la forme $A(P' + P'' + P''') = 0$, deux de la forme $B(P'x' + P''x'' + P'''x''') = 0$, et deux de la forme $C(P'y' + P''y'' + P'''y''') = 0$. Ces sept équations se réduiraient donc aux trois que nous venons de trouver, qui expriment ainsi les conditions de l'équilibre, quel que soit l'angle de la direction commune des forces et du plan xy.

Ainsi la démonstration des équations de l'art. 76, et par conséquent de celles des art. 77 et 78, qui se rapportent à un nombre quelconque de forces parallèles agissant dans des plans différens, est entièrement dégagée de toute considération des *momens*; et comme, de ces équations et de celles de l'art. 63, on déduit les conditions de l'équilibre d'un système quelconque, on peut se dispenser de faire étudier aux commençans une théorie séparée et particulière des *momens*, et, ce qui est encore plus avantageux, leur démontrer, très-simplement et très-rigoureusement, toute la statique, sans mêler, en aucune manière, les idées de mouvement aux notions d'équilibre. Voilà (en l'an 8) la troisième année que j'emploie cette méthode, avec succès, à l'École polytechnique. Quelques-uns des jeunes gens qui suivent mes cours, se sont exercés à varier les démonstrations que je donnais, et à en trouver de nouvelles, parmi lesquelles j'ai distingué, le mois dernier (floréal), celle du C.en *Francœur*, répétiteur, qui a pris, pour axe des x, la ligne passant par l'origine de p', p'', p''', et par l'intersection commune des directions de P', P'' et P'''; et celle du C.en *Derché*, élève, qui s'est servi de l'équation (A) ci-dessus, à laquelle il est parvenu par une analyse particulière.

réduisent à énoncer, art. 79 et suivans, 137 et suivans, &c., que les forces *résultantes* qu'on peut substituer aux forces données, passent par les points ou les lignes fixes.

J'entre dans ces détails, afin que ceux de mes lecteurs qui ont déjà quelques connaissances de mécanique, voient d'avance comment en effet on peut simplifier les premières études, en en supprimant ce qu'on appelle la théorie des *momens*, et comment les équations qu'on déduisait de cette théorie, sont données par de pures considérations géométriques qui ne sont mêlées à aucune idée anticipée de mouvement. Il faut cependant conserver dans la langue scientifique le mot *moment*, ou un mot équivalent; et les propriétés des momens, lorsqu'on ne voudra pas les déduire immédiatement du principe des vîtesses virtuelles, comme je l'ai fait, pourront être regardées comme des conséquences des équations d'équilibre auxquelles elles servaient d'abord de fondement.

66. Veut-on maintenant trouver la résultante P de deux puissances dirigées dans un même plan, et appliquées à deux points matériels, situés dans ce plan, dont la distance est invariable; on a les équations

$$P = \sqrt{(X^2 + Y^2)}\,;\; p = \frac{P'p' + P''p''}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}$$

$$\cos.\alpha = \frac{X}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}},\ \text{ou}\ \sin.\alpha = \frac{Y}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}},$$

au moyen desquelles la quantité et la direction de la résultante sont entièrement déterminées.

67. Si les points d'application des deux puissances sont donnés de position, on aura

$$P = \sqrt{(X^2 + Y^2)}\,;\; y = \frac{Y}{X}x + \frac{P'(y'\cos.\alpha' - x'\sin.\alpha') + P''(y''\cos.\alpha'' - x''\sin.\alpha'')}{X}.$$

La seconde équation est celle du lieu géométrique de tous les points auxquels la résultante peut être appliquée pour satisfaire aux conditions demandées. C'est l'équation de la ligne de direction de cette résultante qui fait avec l'axe des x, un angle dont la tangente $= \frac{Y}{X}$, et qui coupe l'axe des y à une distance de l'origine

$$= \frac{P'(y'\cos.\alpha' - x'\sin.\alpha') + P''(y''\cos.\alpha'' - x''\sin.\alpha'')}{X}.$$

Ainsi tout est déterminé par les deux équations précédentes.

68. Appliquant les formules précédentes au cas de deux forces, dont les directions sont parallèles et font un angle a avec l'axe des x, on a

$$P = P' + P''\,;\; p = \frac{P'p' + P''p''}{P' + P''}\,;\ \cos.\alpha = \cos.a.$$

la résultante est parallèle aux deux composantes.

69. Introduisant les coordonnées des points d'application, on a

$$P = P' + P''\ldots\ y = x\,\text{tang.}\,a + \frac{P'y' + P''y'' - (P'x' + P''x'')\,\text{tang.}\,a}{P' + P''}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$X^2 = (P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'')^2$ $Y^2 = (P' \sin. \alpha' + P'' \sin. \alpha'')^2$. $\alpha =$ l'angle formé par la direction de la résultante et par l'axe des x. x, y sont les coordonnées d'un point quelconque de la direction de cette résultante.			37. Deux puissances qui agissent dans un même plan, étant données en quantités et en directions, trouver les équations qui déterminent la résultante, l'angle que fait sa direction avec une ligne donnée de position, et la plus courte distance de cette direction à un point pris sur la ligne donnée.
x', x'' et y', y'' sont, respectivement, les coordonnées des points d'application des puissances P' et P''; la direction de P' fait un angle α'; et celle de P'' un angle α'' avec l'axe des x.			38. Introduire dans la solution du problème précédent, les coordonnées des points d'application des forces.
$a =$ l'angle formé par la direction commune des puissances et par l'axe des x.			39. Trouver la résultante de deux forces parallèles à une ligne donnée de position.
			40. Introduire dans les formules la condition que les deux forces sont parallèles à l'axe des x. *Art. 70.*

70. Et enfin, si $a = 0$, ou si les deux puissances données sont parallèles à l'axe des x, on a

$$P = P' + P''\,;\ y = \frac{P'y' + P''y''}{P' + P''}.$$

71. Il est aisé de passer de ces équations fondamentales à celles qui expriment l'équilibre d'un nombre quelconque de forces agissant dans un même plan sur un système de points matériels, à distances invariables, situés dans ce plan. En effet, dans le cas de quatre forces et quatre points, on substitue à deux des forces leur résultante (par les formules des art. 66 ou 67), que l'on combine ensuite avec les deux autres forces, et on obtient des formules tant pour l'équilibre de quatre forces, que pour la détermination de la résultante de trois forces. Ce cas sert à résoudre, par un procédé semblable, celui de cinq forces et de cinq points, et ainsi de suite; ce qui donne pour l'équilibre d'un nombre quelconque de forces et de points,

$$P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''' + \&c. = 0$$
$$P' \sin.\alpha' + P'' \sin.\alpha'' + P''' \sin.\alpha''' + \&c. = 0$$
$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \&c. = 0.$$

72. Et si l'on veut introduire, dans les formules, les coordonnées des points d'application des puissances, on aura

$$P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''' + \&c. = 0$$
$$P' \sin.\alpha' + P'' \sin.\alpha'' + P''' \sin.\alpha''' + \&c. = 0$$
$$P'(y' \cos.\alpha' - x' \sin.\alpha') + P''(y'' \cos.\alpha'' - x'' \sin.\alpha'') + \&c. = 0.$$

73. Si l'équilibre n'a pas lieu, on trouvera la quantité et la direction de la résultante par les équations

$$P = \sqrt{(X^2 + Y^2)}\,;\ p = \frac{P'p' + P''p'' + \&c.}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}$$
$$\cos.\alpha = \frac{X}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}\,;\ \text{ou, } \sin.\alpha = \frac{Y}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}.$$

74. Ou en introduisant les coordonnées des points d'application

$$P = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$
$$y = \frac{Y}{X}x + \frac{P'(y' \cos.\alpha' - x' \sin.\alpha') + P''(y'' \cos.\alpha'' - x'' \sin.\alpha'') + \&c.}{X}.$$

75. Si l'on veut, maintenant, déterminer la résultante dans

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THEOREMES.	PROBLÈMES.
			41. Trouver les équations d'équilibre d'un nombre quelconque de puissances dirigées dans un même plan, et appliquées à un système de points matériels à distances invariables, situé dans ce plan.
P', P'', P''', &c., puissances appliquées aux différens points du système dont les coordonnées sont x', y'; x'', y''; x''', y'''; &c.			42. Introduire dans ces équations les coordonnées de points d'application des puissances.
α', α'', α''', &c., angles formés par les directions des puissances et par l'axe des x.			
p', p'', p''', &c., longueurs des perpendiculaires menées de l'origine des coordonnées sur les directions des puissances.			43. Trouver la quantité et la direction de la résultante d'un nombre quelconque de puissances dirigées dans un même plan et appliquées à un système de points matériels à distances invariables, situé dans ce plan.
X, Y, sommes des composantes des puissances prises parallèlement aux axes des x et des y.			44. Introduire dans la solution du problème précédent, les coordonnées des points d'application des forces.
			45. Appliquer l'une et l'autre des deux solu-

le cas où les puissances, agissant dans un même plan, ont des directions parallèles, on prendra les formules des art. 68, 69 et 70, et il suffira, pour les différens cas traités dans ces articles, de continuer les séries de quantités accentuées qui se rapportent aux données du problème.

76. Nous avons supposé jusqu'à présent, que les forces avaient leurs directions dans le plan même où étoit situé le système de points matériels sur lequel elles agissaient; mais les formules nous fournissent des moyens très-simples d'analyser le cas où les puissances agissent dans des plans différens, lorsque leurs directions sont parallèles.

Nous supposons que les points matériels sur lesquels les puissances agissent, sont tous dans le plan xy et composent un système de forme invariable; prenant d'abord le cas de trois forces parallèles qui font un angle commun quelconque avec le plan xy (la valeur de cet angle doit être différente de zéro, ce dont on est toujours le maître parce que la position du plan xy est arbitraire), et appliquant aux conditions de leur équilibre les principes établis précédemment, on trouve

$$P' + P'' + P''' = 0$$
$$P'x' + P''x'' + P'''x''' = 0$$
$$P'y' + P''y'' + P'''y''' = 0.$$

Les deux dernières équations expriment, 1.° que les directions des puissances sont aux distances convenables les unes des autres; 2.° qu'elles sont dans le même plan (condition indispensable pour l'équilibre de trois forces), ou que leurs points de rencontre avec le plan xy sont dans la même ligne droite.

77. Passant de ce cas à celui d'un nombre quelconque de forces parallèles dirigées dans des plans différens, mais dont les points d'application sont dans le même plan, celui des xy, on a pour exprimer les conditions de l'équilibre, les équations

$$P' + P'' + P''' + \&c. = 0$$
$$P'x' + P''x'' + P'''x''' + \&c. = 0$$
$$P'y' + P''y'' + P'''y''' + \&c. = 0.$$

qu'on obtient aisément en composant les forces deux à deux.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			tions précédentes au cas du parallélisme des forces.
			46. Trouver les équations qui expriment les conditions de l'équilibre de trois forces à directions parallèles, et qu'on suppose faire un angle quelconque avec le plan où se trouvent les coordonnées des points d'application de ces forces.
P', P'', &c. les puissances dont les directions sont parallèles. x', x'', &c., y', y'', &c. coordonnées des points où les directions des forces rencontrent le plan x, y.			
			47. Trouver les équations qui expriment les conditions de l'équilibre d'un nombre quelconque de forces, à directions parallèles, situées dans des plans différens, en supposant, 1.° que les points d'application de ces forces sont dans e même plan;

78. Le parallélisme des forces subsistant, et le système étant de forme invariable, les équations précédentes ont lieu soit que les points d'application des forces se trouvent, ou non, dans le même plan. Il suffit que les coordonnées x', x'', &c., y', y'', &c. soient les coordonnées des points de rencontre des directions des forces avec le plan xy, points auxquels on suppose ces forces appliquées.

On verra, par la suite, ce que chacune des deux dernières équations signifie en particulier. Lorsqu'il n'y a pas d'équilibre, on a, pour déterminer la résultante et son point d'application, les équations

$$P = P' + P'' + \&c.\,;\; x = \frac{P'x' + P''x'' + P'''x''' + \&c.}{P}\,;\, y = \frac{P'y' + P''y'' + P'''y''' + \&c.}{P}.$$

La direction de cette résultante est parallèle à celle des composantes.

79. Notre seul objet jusqu'à présent dans la recherche des équations qui donnent les conditions de l'équilibre d'un système libre, a été d'exprimer complétement que ce système était dans une immobilité parfaite, ou que les forces qui agissaient sur lui, pouvaient se réduire à deux forces égales et directement opposées. C'est là la seule signification que nous puissions encore donner à ces équations; et je regarde même comme un grand avantage de les avoir envisagées et obtenues uniquement sous ce point de vue, en évitant ainsi de cumuler des notions qui doivent être soigneusement séparées, ou de faire un usage anticipé de celles que l'élève n'est pas encore censé avoir. C'est, par exemple, l'inconvénient dans lequel on tombe, quand on associe d'abord l'idée de *rotation* aux conditions qu'exprime l'équation des *momens*, qui, pour un système libre, peut et doit s'obtenir, comme nous l'avons fait, sans qu'il soit question, en aucune manière, de point fixe dans le système.

Mais une fois qu'on a ces équations, on peut chercher si elles n'expriment pas des conditions particulières, autres que celles qu'on y avait envisagées en premier lieu : nous parviendrons ainsi à reconnaître que, s'il y a un point fixe dans le système, les conditions de l'équilibre, lorsque les directions des forces et tous les points matériels qui composent ce système se trouvent dans le même plan, sont exprimées par une des trois équations qui appartiennent au même système supposé libre; ce point fixe étant l'origine des x, y, et celle des perpendiculaires p', p'', &c.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			2.° Que ces points d'application sont dans des plans différens. De plus, trouver la résultante et son point d'application lorsqu'il n'y a pas équilibre.

La même propriété a lieu, lorsqu'il y a un axe fixe dans le système, les directions des forces étant parallèles entre elles, et situées, ou non, dans le même plan.

80. Dans le premier cas, observons qu'une des équations pour la détermination de la résultante, lorsque les forces agissent dans le même plan, est

$$Pp = P'p' + P''p'' + P'''p''' + \&c.$$

Si le second membre est zéro par lui-même, ou si

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \&c. = 0,$$

on a nécessairement ou $P = 0$, ou $p = 0$, c'est-à-dire que la résultante est nulle, ou qu'elle passe par l'origine des p', p'', &c.

81. Dans le second cas, une des équations pour déterminer la résultante, est

$$Py = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \&c. = 0.$$

Si on a $P'y' + P''y'' + \&c. = 0$, il en résultera ou $P = 0$, ou $y = 0$, c'est-à-dire que la résultante sera nulle, ou qu'elle passera par l'axe des x.

82. La somme des produits $Py' + P''y'' + \&c.$ prend le nom de *somme des momens* par rapport à l'axe des x, lorsque la direction commune des forces est perpendiculaire à cet axe et au plan xy.

83. Maintenant il est aisé de voir, art. 80 et théorème 34, que lorsque les directions des forces et les points matériels qui composent le système sont dans le même plan, s'il y a un point fixe dans ce système, les conditions de l'équilibre sont exprimées par l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \&c. = 0$$

$$P'(y' \cos. \alpha' - x' \sin. \alpha') + P''(y'' \cos. \alpha'' - x'' \sin. \alpha'') + \&c. = 0;$$

en plaçant, ce qu'on est toujours le maître de faire, l'origine des x, y et des p', p'', &c. au point fixe.

84. Et s'il s'agit de forces parallèles agissant dans des plans différens sur un système dans lequel il y ait une ligne ou un axe fixe considéré comme axe des x, les conditions de l'équilibre seront exprimées par l'équation

$$P'y' + P''y'' + P'''y''' + \&c. = 0.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		34. Si la somme des momens de plusieurs forces agissant dans le même plan, est égale à zéro, la résultante de ces forces ou est nulle, ou passe par le point auquel se rapportent les momens.	
		35. Si la somme des produits de plusieurs forces à directions parallèles, par les coordonnées à l'axe des x, des points de rencontre de ces directions et du plan x, y, est égale à zéro, la résultante de ces forces ou sera nulle, ou passera par l'axe des x.	
Toutes les lettres des équations ci à côté, ont la même signification qu'aux art. 62, 63, 64, 65 et 66.	23. Des *momens* considérés par rapport à une ligne, dans le sens qu'on donne ordinairement à ce mot.		48. Les directions des forces et les points matériels qui composent le système étant dans le même plan, trouver les conditions de l'équilibre lorsqu'il y a un point fixe dans ce système.
			49. Les forces ayant des directions parallèles, et agissant dans des plans différens, trouver les conditions de l'équilibre lorsqu'il y a un axe fixe dans le système.

85. DANS l'hypothèse de l'article précédent, si ce n'est pas une ligne, mais un point, qui est fixe, il faudra, pour exprimer les conditions de l'équilibre, énoncer que cet équilibre a lieu par rapport à deux axes passant par ce point fixe; ce qui donnera

$$P'y' + P''y'' + P'''y''' + \&c. = 0$$
$$P'x' + Px'' + P'''x''' + \&c. = 0;$$

et il résulte de l'égalité de chacune de ces deux sommes à zéro, que la résultante se trouve en même temps sur l'axe des x et sur celui des y, où que sa direction passe par l'intersection de ces deux axes.

86. PUISQUE les cas d'équilibre, par rapport à un point ou à une ligne fixe qu'on vient d'examiner, supposent que la direction de la résultante des puissances passe par le point ou l'axe fixe, il suit de là qu'un point fixe autour duquel des puissances dirigées soit dans un même plan, soit dans des plans différens, mais avec des directions parallèles, sont en équilibre, supporte le même effort que si toutes les puissances lui étaient immédiatement appliquées. Il est donc aisé de trouver la valeur de la pression de ce point, par les formules des articles précédens.

87. LORSQUE des forces parallèles sont en équilibre autour d'un axe fixe, celui des x par exemple, leur résultante, qui doit se trouver sur cet axe, le coupe à une distance de l'origine égale à

$$\frac{P'x' + P''x'' + P'''x''' + \&c.}{P' + P'' + P''' + \&c.}.$$

C'est la même distance qu'on trouverait, si chaque puissance était immédiatement appliquée à l'axe des x (en conservant le parallélisme), à la même distance de l'axe des y, où se trouve le point de rencontre de sa direction et du plan xy.

88. SI on applique au point de l'axe des x, qui est à une distance $\frac{P'x' + P''x'' + \&c.}{P' + P'' + \&c.}$ de l'origine, et parallélement à la direction commune, une puissance $P' + P'' + \&c.$ agissant en sens contraire de la résultante, le système supposé libre sera en équilibre. On trouve

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			50. Trouver, dans la même hypothèse, les conditions de l'équilibre lorsqu'il n'y a qu'un point fixe dans le système.
		36. Lorsque des forces dont les directions sont ou dans un même plan sans être parallèles, ou parallèles et dans des plans différens, sont en équilibre autour d'un point fixe, ce point supporte la même pression que si toutes les forces lui étaient immédiatement appliquées.	51. Des forces dont les directions sont ou dans un même plan sans être parallèles, ou parallèles et dans des plans différens, étant en équilibre autour d'un point, trouver la pression que supporte ce point.
		37. Lorsque des puissances à directions parallèles sont en équilibre autour d'un axe immobile (celui des x par exemple), le système, supposé libre, serait en équilibre si on appliquait à cet axe des forces parallèles, égales et de directions contraires à celles qui agissent déjà sur le système, chacune de ces nouvelles forces agissant à la même distance de l'axe des y que celle à laquelle elle correspond, et dont le point d'application est supposé dans le plan xy.	52. Des puissances à directions parallèles étant en équilibre autour d'un axe fixe supposé inflexible, trouver les pressions que supporteraient

aisément, d'après cela, les pressions que supporteraient deux points fixes auxquels l'axe supposé inflexible serait retenu : si ces points sont l'un à l'origine, l'autre à une distance a de l'origine, nommant Q' et Q'' les pressions qu'ils éprouvent parallélement à la direction commune des puissances, on aura, en faisant

$$P' + P'' + \&c. = P\text{, et } \frac{P'x' + P''x'' + \&c.}{P' + P''} = p,$$

$$Q' = \frac{a-p}{a} P;\ Q'' = \frac{p}{a} P,$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$Q' = P' + P'' + \&c. - \frac{P'x' + P''x'' + \&c.}{a};$$

$$Q'' = \frac{P'x' + P''x'' + \&c.}{a}.$$

89. Il est utile d'évaluer les efforts que supporte l'axe, aux deux points sus-mentionnés, dans une direction perpendiculaire à sa longueur. Ces efforts sont

à l'origine.................. $\frac{P(a-p)}{a}$ sin. θ,

à une distance a de l'origine... $\frac{Pp}{a}$ sin. θ.

90. Et si la puissance P a une direction parallèle à l'axe, les deux efforts évalués dans l'article précédent, deviennent

à l'origine.................. $\frac{\rho}{a} P$,

à une distance a de l'origine... $\frac{-\rho}{a} P$.

91. Les formules des articles 71 et 83, qui donnent les conditions de l'équilibre dans le cas où des forces, dirigées dans un même plan, sollicitent un système composé de points matériels renfermés dans ce plan (système qui peut être, ou *libre*, ou assujetti à tourner autour d'un point fixe), offrent plusieurs propriétés remarquables.

On en déduit d'abord la formule des vîtesses virtuelles

$$P'dp_{\prime} + P''dp_{\prime\prime} + P'''dp_{\prime\prime\prime} + \&c. = 0.$$

92. Ensuite, si P', P'', &c. sont des fonctions de $p_{\prime}$, $p_{\prime\prime}$, &c., il y aura une certaine fonction de $p_{\prime}$, $p_{\prime\prime}$, &c. qui sera un *maximum* ou un *minimum;* ce qui conduit à des conséquences utiles et curieuses sur les diverses positions d'équilibre dont un système est susceptible, et sur la stabilité ou la non-stabilité de ces positions ; la théorie des corps flottans nous en offrira des exemples.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
a = la distance entre les deux points dont on veut avoir la pression dans le sens parallèle à la direction des puissances, l'un de ces points étant à l'origine et l'autre sur l'axe des x.			deux points fixes auxquels cet axe serait retenu. 53. Une puissance étant appliquée à un point donné d'un axe inflexible avec lequel sa direction fait un angle quelconque; trouver les efforts perpendiculaires à cet axe que supporteraient deux points fixes auxquels il serait retenu.
Q' = pression du point placé à l'origine. Q'' = pression de l'autre point. P = somme ou résultante des puissances parallèles. p = distance à l'axe des y, du point de rencontre de la direction de P et du plan xy. θ est l'angle formé par l'axe et par la direction de la puissance P.			54. Un axe inflexible étant retenu à deux points fixes, et une puissance agissant parallélement à cet axe sur un point donné d'une ligne inflexible, fixée et perpendiculaire au même axe, trouver les efforts que cet axe supporte aux deux points fixes perpendiculairement à sa longueur.
ρ = la distance de l'axe des x à la direction de la puissance P, lorsque sa direction est parallèle à cet axe; on peut observer que ce cas donne $p = \infty$.		38. Le principe des vitesses virtuelles a lieu dans le cas de l'équilibre d'un système de points matériels, à distances invariables, compris tous dans un même plan, et sollicités par des puissances dont les directions sont dans ce plan.	
P', P'', &c. sont les puissances. $p_{,}$, $p_{,,}$, $p_{,,,}$, &c. des longueurs prises sur les directions de ces puissances, qui se terminent aux points d'application.		39. Dans le cas de l'art. 91, si P', P'', &c. sont fonctions de $p_{,}$, $p_{,,}$, &c. il y aura une certaine fonction de ces distances qui sera un *maximum* ou un *minimum*.	

93. Si le système de points matériels est soumis à la pesanteur, on a, dans le cas d'équilibre,

$$\frac{m_{,}p_{,} + m_{,,}p_{,,} + m_{,,,}p_{,,,} + \&c.}{m_{,} + m_{,,} + m_{,,,} + \&c.} = \ldots \left\{ \begin{array}{c} maximum \\ ou \\ minimum. \end{array} \right.$$

94. Enfin, ce système pesant étant attaché par une ligne inflexible à un point fixe autour duquel il peut tourner, si le plan horizontal auquel aboutissent les lignes $p_{,}$. $p_{,,}$, &c. est au-dessous de ce système, l'équilibre sera ou ne sera pas stable, suivant qu'on aura $\frac{m'p' + m''p'' + \&c.}{m' + m'' + \&c.}$ égal à un *minimum* ou à un *maximum*.

95. La théorie précédemment exposée, comprend celle de l'équilibre du levier, de laquelle on peut déduire des principes applicables à l'équilibre des machines, qui peuvent toutes se rapporter au levier d'une manière plus ou moins immédiate : cependant, comme le rapprochement pourrait, dans certains cas, devenir embarrassant, il est bon de dire quelque chose du plan incliné: au moyen de quoi ces principes généraux renfermeront tout ce qui est nécessaire pour vérifier l'équilibre d'une machine quelconque; mais la théorie du plan incliné n'étant qu'un cas très-particulier de celle de l'équilibre d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une ligne donnée, je vais d'abord envisager les questions sous le point de vue le plus général.

Si le corps ne peut se mouvoir que sur une surface immobile qui ait pour équation $K = 0$, il faudra pour son équilibre que la résultante de toutes les puissances qui agissent sur lui, ait une direction qui coïncide avec celle de la normale; on déterminera soit le point de la surface où des puissances de quantités et de directions données, rempliraient cette condition, soit les puissances dont les actions seraient détruites sur un point donné, par les équations suivantes :

$$X = \frac{R\left(\frac{dK}{dx}\right)}{\Omega}; \quad Y = \frac{R\left(\frac{dK}{dy}\right)}{\Omega}; \quad Z = \frac{R\left(\frac{dK}{dz}\right)}{\Omega}.$$

R qui exprime la pression exercée sur le point de la surface courbe où le corps est en équilibre, a pour valeur $\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z)}$. Éliminant $\frac{R}{\Omega}$ des équations précédentes, on parviendra aux deux suivantes, qui doivent en général être satisfaites pour que l'équilibre ait lieu sur un point quelconque:

$$X\left(\frac{dK}{dy}\right) = Y\left(\frac{dK}{dx}\right); \quad X\left(\frac{dK}{dz}\right) = Z\left(\frac{dK}{dx}\right).$$

96. Supposons maintenant que le point mobile est assujetti à se mouvoir sur une courbe immobile à double ou simple courbure, ou qu'il est renfermé dans un

NOTATION.

$m_{,}$, $m_{,,}$, &c. sont les points matériels qui composent le système.

$p_{,}$, $p_{,,}$, &c. sont les distances respectives de ces points à un plan horizontal de position arbitraire.

K est une fonction de x, y et z.

$$\Omega = \sqrt{\left[\left(\frac{dK}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dK}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dK}{dz}\right)^2\right]}$$

$$\frac{\left(\frac{dK}{dx}\right)}{\Omega},\ \frac{\left(\frac{dK}{dy}\right)}{\Omega} \text{ et } \frac{\left(\frac{dK}{dz}\right)}{\Omega}.$$

sont les cosinus des angles formés par les axes coordonnés, ou par les directions des composantes X, Y et Z, respectivement, et par la normale au point de la surface courbe qui a x, y et z pour coordonnées.

$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ est la résultante unique de toutes les puissances, ou la valeur de la pression que le point matériel exerce sur la surface.

Les équations de la courbe à double courbure sont, art. 96 : $z = f(x)$; $y = \varphi(x)$ $dz = dx\, f'(x)$; $dy = dx\, \varphi'(x)$.

$R = \sqrt{(X^1 + Y^2 + Z^2)}$ = la pression qui a lieu au point de la courbe où le corps est placé.

DÉFINITIONS.

24.

Du plan incliné ; qu'on imagine un plan horizontal coupé par deux plans inclinés à l'horizon, de manière que les trois lignes d'intersection des trois plans soient parallèles entre elles, ce système offrira deux *plans inclinés* adossés. Une section des trois plans par un plan vertical perpendiculaire à leurs trois lignes d'intersection, donne un triangle dont la base est horizontale ; les deux autres côtés de ce triangle, représentent les *plans inclinés* et en prennent même le nom, lorsque les mobiles sont

THÉORÈMES.

40.

L'équation d'un pendule de forme invariable, et soumis à la pesanteur, a lieu dans deux positions correspondantes au *minimum* et au *maximum* de la quantité

$$\frac{m_{,}p_{,} + m_{,,}p_{,,} + \&c.}{m_{,} + m_{,,}\ \&c.},$$

l'une donnant l'équilibre stable et l'autre l'équilibre non stable.

PROBLÈMES.

55.

Trouver les conditions de l'équilibre dans le cas où un point matériel, sollicité par des puissances quelconques, est assujetti à se mouvoir sur une surface courbe ou sur une courbe à double ou simple courbure.

canal ou tuyau infiniment étroit dont la courbure est quelconque. L'équilibre aura lieu dans tous les cas où, la résultante unique des puissances sera dirigée dans un plan perpendiculaire à l'élément de courbe sur lequel le corps se trouve placé ; on voit que ce problème a plus d'indétermination que le précédent.

Le point de la courbe où des puissances données en quantité et en direction tiendront le corps en équilibre, se détermine par l'équation

$$X + Y\varphi'(x) + Zf'(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

qui donne la valeur de x en fonction de X, Y et Z, et qui en général doit être satisfaite pour que l'équilibre soit possible. On calculera la pression d'après des conditions données, et réciproquement, par les équations

$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{R}{\Gamma}\,;\ Y = \dfrac{R\,a_{\prime}}{\Gamma}\,;\ Z = \dfrac{R\,a_{\prime\prime}}{\Gamma}, \\ \text{dont une quelconque est donnée par les deux autres ; } a_{\prime} \text{ et } a_{\prime\prime} \text{ ont entre} \\ \text{elles la relation suivante :} \\ a_{\prime\prime} = -\dfrac{1 + a_{\prime}\varphi'(x)}{f'(x)} \end{array}\right\} \ldots (2),$$

en sorte que pour une valeur déterminée de x, l'une est donnée lorsqu'on connaît l'autre. Les trois premières équations (2) expriment que la direction de la résultante ou pression R est parallèle à une ligne faisant avec les axes des x, y et z, des angles dont les cosinus respectifs sont $\frac{1}{\Gamma}$, $\frac{a_{\prime}}{\Gamma}$ et $\frac{a_{\prime\prime}}{\Gamma}$; et la quatrième équation (2) exprime que cette ligne est perpendiculaire à la tangente, menée au point de la courbe parcourue, correspondant à x. Si dans cette quatrième équation l'on substitue pour $a_{\prime}$ et $a_{\prime\prime}$ leurs valeurs $\frac{Y}{X}$ et $\frac{Z}{X}$, déduites des trois premières, on retrouvera l'équation (1).

La pression R a toujours avec les puissances le rapport $R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$; parmi les différentes hypothèses à faire sur sa direction, on peut distinguer celle qui ferait coïncider cette direction avec le rayon de courbure ; $a_{\prime}$ et $a_{\prime\prime}$ sont alors déterminés pour chaque point de la courbe, par les équations,

$$a_{\prime} = \frac{\varphi'(x).f'(x).f''(x) - \{1 + [f'(x)]^2\}\varphi''x}{\varphi'(x).\varphi''(x) + f'(x).f''(x)}$$

$$a_{\prime\prime} = -\frac{1 + a_{\prime}\varphi'(x)}{f'(x)}.$$

97. Le cas le plus simple auquel on puisse appliquer la théorie précédente, est celui de l'équilibre d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur un plan où il est sollicité par deux puissances dont les directions sont dans un autre plan perpendiculaire au premier. Les conditions de l'équilibre se réduisent à $P'\cos. k' = P''\cos. k''$, et la pression $= P'\sin. k' + P''\sin. k''$.

Si deux points materiels, respectivement posés sur deux lignes droites se coupant entre elles, sont sollicités chacun par une puissance agissant dans le plan de ces

NOTATION.

$\Gamma = \sqrt{(1 + a_{,}^{2} + a_{,,}^{2})}$.

Si, à partir d'un point quelconque de la courbe qui a $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ pour coordonnées, on mène une ligne droite, dans le plan normal à ce point, et que $z = z_{,} + a_{,,}(x - x_{,})$ soit l'une des équations de cette ligne, l'autre équation sera

$y = y_{,} + a_{,}(x - x_{,})$.

Ainsi cette ligne fait avec les axes des x, y et z, des angles dont les cosinus sont respectivement,

$$\frac{1}{\Gamma}\,;\ \frac{a_{,}}{\Gamma} \text{ et } \frac{a_{,,}}{\Gamma}.$$

$$f''(x) = \frac{d.f'(x)}{dx}$$

$$\varphi''(x) = \frac{d.\varphi'(x)}{dx},$$

P' et P'' sont, art. 97, des puissances dont les directions font respectivement des angles k' et k'' avec le plan sur lequel le point sollicité est assujetti à se mouvoir.

φ' et φ'' sont, art. 97, les forces accélératrices qui animent les masses m' et m'', et dont les directions font des angles respectifs k' et k'' avec les lignes sur lesquelles m' et m'' sont assujetties à se mouvoir.

m' et m'' sont, art. 98, les masses pesantes, en équilibre sur deux plans inclinés adossés, dont les côtés font respectivement des angles ε' et ε'' avec l'horizontale.

DÉFINITIONS.

assujettis à se mouvoir sur ces côtés. En adoptant cette dénomination, la perpendiculaire abaissée du *sommet* sur la base horizontale est la *hauteur* commune des deux plans inclinés ; les deux segmens de cette base sont, respectivement, les *bases* de chacun des plans inclinés, et les longueurs des hypothénuses des triangles rectangles dont les autres côtés sont la *hauteur* commune et les *bases*, s'appellent les *longueurs* des plans inclinés.

THÉORÈMES.

41.

Lorsque deux points matériels pesans, liés par un fil, sont en équilibre sur deux plans inclinés, leurs poids sont proportionnels aux longueurs des plans inclinés sur lesquels ils sont respectivement placés. (art. 98.)

42.

Le principe des vîtesses virtuelles a lieu dans l'équilibre du plan incliné. (art. 99.)

43.

Dans le cas des problèmes 58 et 59, si sur

PROBLÈMES.

56.

Trouver les conditions de l'équilibre d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur un plan où il est sollicité par deux puissances dont les directions sont dans un autre plan perpendiculaire au premier. (article 97.)

57.

Deux lignes droites forment un angle quelconque entre elles, et deux points matériels respectivement assujettis à se mouvoir sur chacune de ces lignes, sont assujettis l'un à l'autre par un fil inextensible couché le long de ces lignes ; trouver les conditions de l'équilibre dans le cas où deux puissances dirigées dans le plan des deux lignes, solliciteraient respectivement ces points matériels. (art. 97.)

58.

Un point matériel soumis à l'action d'une puis-

deux lignes, et sont de plus liés entre eux par un cordon inextensible et parfaitement flexible qui passe par le point d'intersection des deux lignes, la condition de l'équilibre sera exprimée par l'équation suivante : $\phi' m' \cos. k' = \phi'' m'' \cos. k''$.

Les formules de cet article résolvent les problèmes 56 et 57.

98. SUPPOSONS que le plan des deux lignes soit vertical, et que les masses m' et m'' soient pesantes, on aura, dans le cas de l'équilibre, l'équation suivante, qui donne le théorème 41 : $m' \sin. \varepsilon' = m'' \sin. \varepsilon''$.

99. ON peut observer que les cas d'équilibre qu'on vient d'examiner, où il s'agit d'un système de deux points dont les distances respectives sont variables, donnent, comme ceux relatifs aux points dont les distances sont invariables, l'équation $P' dp' = P'' dp''$, théorème 42, qui est celle fournie par le principe des vîtesses virtuelles, en observant néanmoins de s'assujettir aux conditions du système, qui exigent que les points soient sur des lignes données.

100. LE mouvement d'un point matériel pesant sur un plan incliné, se déduit aisément de la théorie du mouvement d'un point sollicité par des puissances quelconques; mais comme les équations très-simples qui y ont rapport, sont liées à celles traitées dans les trois articles précédens, on les a mises à la suite de ces articles.

Si un point matériel soumis à l'action d'une puissance constante g qui agit parallélement à une ligne donnée de position, est assujetti à se mouvoir sur une autre ligne de position aussi donnée, faisant, avec la première, un angle dont ε est le complément, les circonstances du mouvement seront déterminées par l'équation $e = \frac{1}{2} g t^2 \sin. \varepsilon$, qui résout le problème 58 et fournit une construction très-simple, indiquée par le théorème 43.

101. LA vîtesse au bout du temps t est $v = gt \sin. \varepsilon$, équation d'où on déduit le théorème 44.

102. ON passe de là au mouvement de deux points matériels respectivement placés sur deux plans inclinés ; ces plans formant des angles ε' et ε'' avec une perpendiculaire à la direction commune de deux puissances qui agissent parallélement à la hauteur commune des deux plans inclinés, sont proportionnels aux masses m' et m'', et leur impriment à chacune la force accélératrice constante g. Les corps sont liés entre eux par un fil inextensible passant par le sommet des deux plans inclinés ; et les circonstances du mouvement sont déterminées par les équations

$$e = \frac{m' \sin. \varepsilon' - m'' \sin. \varepsilon''}{m' + m''} \cdot \frac{1}{2} g t^2, \quad v = \frac{m' \sin. \varepsilon' - m'' \sin. \varepsilon''}{m' + m''} g t.$$

(Les formules de l'article suivant se rapportent au cas où $\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{4}$ circonférence).

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
e = l'espace parcouru. t = le temps. ε = l'angle formé par le plan incliné et par la ligne horizontale. g = la force accélératrice de la gravité.		un diamètre pris sur la première ligne, et ayant une de ses extrémités au point d'intersection des deux lignes (où le mouvement est censé commencer), on décrit un cercle; une corde quelconque de ce cercle, partant de l'origine, sera parcourue dans le même temps que l'aurait été le diamètre, si le corps se fût mu librement dans la direction de ce diamètre.	sance constante qui agit parallèlement à une ligne donnée de position, étant assujetti à se mouvoir sur une autre ligne de position aussi donnée, déterminer les circonstances du mouvement.
v = la vîtesse.		44. La vitesse, au bout d'un temps quelconque, est égale à celle que le corps aurait acquise s'il fût tombé verticalement d'une hauteur égale à la différence de niveau entre son point de départ et son point d'arrivée.	59. Déterminer graphiquement les espaces qui, dans le cas du problème précédent, seraient parcourus sur la première ligne, et ceux correspondans qui sont effectivement parcourus sur la deuxième ligne.
m' et m'' sont les deux masses. ε' et ε'' les angles que les directions des puissances forment avec l'horizontale.			60. Deux points matériels respectivement placés sur deux plans inclinés, et liés l'un à l'autre par un fil inextensible, étant soumis à l'action de deux puissances constantes qui agissent dans des directions parallèles, déterminer les circonstances du mouvement.

103. Dans le cas où les deux plans inclinés sont parallèles, cette équation devient

$$e = \frac{m' - m''}{m' + m''} \cdot \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$v = \frac{m' - m''}{m' + m''} \cdot g t,$$

et contient le fondement de la théorie de la machine qu'*Athood* a imaginée pour faire des expériences sur l'accélération du mouvement des corps graves.

104. Généralement, si un point matériel qui se meut dans une direction donnée rectiligne avec une vîtesse V, rencontre un obstacle qui l'oblige de se détourner et de se mouvoir dans une autre direction rectiligne qui fasse un angle θ avec la première, la vîtesse dans la seconde direction sera $V \cos. \theta$, et la vîtesse perdue $V(1 - \cos. \theta)$, ou V sin. verse θ.

105. Passons maintenant à des considérations plus générales sur le mouvement d'un point matériel sollicité par des puissances quelconques. Si on imprime à ce point trois mouvemens uniformes parallélement à trois axes perpendiculaires entre eux, dont les équations soient

$$x = V't; \; y = V''t; \; z = V'''t,$$

le mouvement résultant sera rectiligne, uniforme et déterminé par l'équation

$$s = t\sqrt{(V'^2 + V''^2 + V'''^2)},$$

on a

$$s = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)};$$

la vîtesse dans la direction de $s \ldots U = \sqrt{(V'^2 + V''^2 + V'''^2)}$; et les angles formés par la direction de s ou du mouvement, sont donnés par les équations

$$\cos. \alpha = \frac{V'}{\sqrt{(V'^2 + V''^2 + V'''^2)}}; \; \cos. \beta = \frac{V''}{\sqrt{(V'^2 + V''^2 + V'''^2)}}; \; \cos. \gamma = \frac{V'''}{\sqrt{(V'^2 + V''^2 + V'''^2)}}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			61. Déduire de la solution du problème précédent la théorie de la machine d'*Athood.*
			62. Si un corps qui se meut dans une direction rectiligne avec une certaine vîtesse, est obligé par un obstacle de s'en détourner pour suivre une autre direction rectiligne, trouver la vîtesse dans la nouvelle direction.
V', V'', et V''' sont les vîtesses imprimées parallélement aux axes des x, y et z respectivement. s = la longueur de la ligne droite parcourue pendant le temps t. U est la vîtesse dans la direction du mouvement. α, β et γ sont les angles formés par la direction du mouvement et les axes des x, y et z.			63. Un point matériel étant animé de trois vîtesses constantes parallélement à trois axes coordonnés, trouver, 1.° La nature de la ligne que parcourt ce point ; 2.° La direction de son mouvement ; 3.° Sa vîtesse dans le sens de sa direction.

106. On voit, par ce qui précède, que la composition et la décomposition des vîtesses simples se fait de la même manière que celle des quantités de mouvement et des forces motrices.

107. Si le point matériel est animé de deux vîtesses $V_{\prime}$ et $V_{\prime\prime}$ à-la-fois, faisant avec les axes coordonnés, des angles respectifs α', β', γ'; α'', β'', γ''; on aura

$$s = Ut \ldots U = \sqrt{[V_{\prime}^2 + 2 V_{\prime} V_{\prime\prime}(\cos.\alpha' \cos.\alpha'' + \cos.\beta' \cos.\beta'' + \cos.\gamma' \cos.\gamma'') + V_{\prime\prime}]}$$

$$\cos.\alpha = \frac{V_{\prime} \cos.\alpha' + V_{\prime\prime} \cos.\alpha''}{U}; \cos.\beta = \frac{V_{\prime} \cos.\beta' + V_{\prime\prime} \cos.\beta''}{U}; \cos.\gamma = \frac{V_{\prime} \cos.\gamma' + V_{\prime\prime} \cos.\gamma''}{U};$$

et la valeur du cosinus de l'angle que les deux directions données forment entre elles, sera

$$\cos.\alpha' \cos.\alpha'' + \cos.\beta' \cos.\beta'' + \cos.\gamma' \cos.\gamma'';$$

d'où l'on voit que U peut être représentée par le côté d'un triangle dont $V_{\prime}$ et $V_{\prime\prime}$ seraient les deux autres côtés.

108. Supposons maintenant qu'on imprime au point matériel, parallélement à chaque axe, un mouvement uniformément accéléré; les équations de ce mouvement étant

$$x = \tfrac{1}{2} g_{\prime} t^2; \; y = \tfrac{1}{2} g_{\prime\prime} t^2; \; z = \tfrac{1}{2} g_{\prime\prime\prime} t^2;$$

les projections sur les plans xy et xz de la ligne parcourue, auront pour équations

$$y = \frac{g_{\prime\prime}}{g_{\prime}} x; \; z = \frac{g_{\prime\prime\prime}}{g_{\prime}} x;$$

la ligne parcourue sera une ligne droite, et on aura

$$s = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \tfrac{1}{2} t^2 \sqrt{(g_{\prime}^2 + g_{\prime\prime}^2 + g_{\prime\prime\prime}^2)}$$

$$\cos.\alpha = \frac{g_{\prime}}{\sqrt{(g_{\prime}^2 + g_{\prime\prime}^2 + g_{\prime\prime\prime}^2)}}; \cos.\beta = \frac{g_{\prime\prime}}{\sqrt{(g_{\prime}^2 + g_{\prime\prime}^2 + g_{\prime\prime\prime}^2)}}; \cos.\gamma = \frac{g_{\prime\prime\prime}}{\sqrt{(g_{\prime}^2 + g_{\prime\prime}^2 + g_{\prime\prime\prime}^2)}};$$

La force accélératrice est constante et égale à $\sqrt{(g_{\prime}^2 + g_{\prime\prime}^2 + g_{\prime\prime\prime}^2)}$, où on voit qu'elle se compose de trois forces accélératrices données, de la même manière que s'il s'agissait de mouvemens uniformes.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		45. On peut faire la composition et la décomposition des vîtesses imprimées à un point matériel, comme on fait celle des puissances appliquées à ce point.	
$V_{,}$ et $V_{,,}$ vîtesses imprimées dans des directions qui font respectivement avec les axes des x, y et z, des angles α', β', γ' et α'', β'', γ''. U et s même signification qu'à l'article 105.		46. Si dans l'hypothèse du problème 64, les vîtesses $V_{,}$ et $V_{,,}$ sont représentées par deux lignes partant de l'origine et comptées sur les directions respectives de ces vîtesses, U sera représenté en direction et quantité par le troisième côté du triangle dont $V_{,}$ et $V_{,,}$ sont les deux autres côtés.	64. Si deux lignes se coupent à l'origine des x, y, z en faisant un angle quelconque entre elles et avec les axes, et qu'on imprime à un point matériel deux vîtesses dans les sens respectifs de chacune de ces lignes, trouver, 1.° La vîtesse unique résultante ; 2.° La direction du mouvement.
$g_{,}$, $g_{,,}$, $g_{,,,}$ sont les forces accélératrices imprimées parallélement aux axes des x, y et z. s est la longueur de la ligne parcourue dans l'espace. α, β et γ les angles formés par la ligne s et les axes des x, y et z.		47. Lorsqu'un point matériel est animé de forces accélératrices constantes parallélement aux trois axes coordonnés, ces forces accélératrices, dans le cas où il n'y a pas de vîtesses initiales, se composent en une seule pareillement constante, de la même manière que s'il s'agissait de mouvemens uniformes.	65. Un point matériel étant sollicité par trois puissances constantes qui agissent parallélement aux trois axes coordonnés, trouver, dans le cas où il n'y aurait aucune vîtesse constante initiale, 1.° La nature de la ligne parcourue par ce point ; 2.° La direction du mouvement ; 3.° L'expression de la force accélératrice.

109. D'après cela, un point matériel étant sollicité dans les directions de deux lignes qui se coupent à l'origine et qui font respectivement des angles α', β', γ'; α'', β'', γ'' avec les axes des x, des y et des z, par des puissances constantes capables d'imprimer des forces accélératrices $G_{,}$ et $G_{,,}$, on aura, dans le cas où il n'y a pas de vîtesse initiale,

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

$$g = \sqrt{[G_{,}^2 + 2G_{,}G_{,,}(\cos.\alpha'\cos.\alpha'' + \cos.\beta'\cos.\beta'' + \cos.\gamma'\cos.\gamma'') + G_{,,}^2]}$$

$$\cos.\alpha = \frac{G_{,}\cos.\alpha' + G_{,,}\cos.\alpha''}{g};$$

$$\cos.\beta = \frac{G_{,}\cos.\beta_{,} + G_{,,}\cos.\beta_{,,}}{g};$$

$$\cos.\gamma = \frac{G_{,}\cos.\gamma' + G_{,,}\cos.\gamma''}{g}.$$

Le cosinus de l'angle formé par les deux lignes qui se coupent à l'origine, a pour valeur

$$\cos.\alpha'\cos.\alpha'' + \cos.\beta'\cos.\beta'' + \cos.\gamma'\cos.\gamma''.$$

Ainsi, nous pouvons dire ici de g ou de la force accélératrice résultante, ce que nous avons dit de la vîtesse résultante U, art. 107.

110. En généralisant la théorie de l'article 6, on parvient à un théorème sur la nature de la ligne parcourue et la direction du mouvement, dans une infinité de cas où les espaces parcourus parallélement aux axes sont égaux aux produits d'une fonction quelconque du temps par des quantités données. Ainsi les équations des mouvemens imprimés étant

$$x = af(t);\; y = bf(t);\; z = cf(t),$$

on a

$$y = \frac{b}{a}x;\; z = \frac{c}{a}x;\; s = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}f(t);$$

la ligne parcourue est une droite, faisant avec les axes coordonnés, des angles, dont les cosinus sont

$$\cos.\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}};\; \cos.\beta = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}};\; \cos.\gamma = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
α', β', γ' ; α'', β'', γ'' ; angles respectivement formés par les directions de deux puissances constantes $G_{,}$ et $G_{,,}$, et par les axes des x, y et z. α, β et γ angles que sa direction fera respectivement avec les axes des x, y et z. $g =$ la force accélératrice unique qui aura lieu. $s =$ la ligne droite parcourue pendant le temps t.		48. Dans le cas du problème 66, si on prend dans l'espace deux lignes qui se coupent, qui soient respectivement parallèles aux directions des deux puissances, et dont la longueur, à partir du point d'intersection, représente ces puissances, la ligne droite qui joindra les extrémités de ces deux lignes, représentera en quantité et en direction la puissance unique résultante.	66. Un point matériel étant sollicité par deux puissances constantes dans les directions respectives de deux lignes qui se coupent à l'origine et qui font un angle quelconque entre elles, trouver l'équation du mouvement, et la direction de la ligne parcourue.
$s =$ la ligne droite parcourue pendant le temps t.		49. Si un point matériel est animé, parallèlement aux trois axes, de trois mouvemens dont les équations soient $x = af(t)$ $y = bf(t)$ $z = cf(t)$, $f(t)$ étant une fonction quelconque de t, ce point décrira une ligne droite passant par l'origine.	

111. Examinons le cas où le point matériel est animé de forces accélératrices constantes parallélement aux trois axes, avec des vîtesses initiales. Les équations du mouvement imprimé sont, dans ce cas,

$$x = V_{,}t + \tfrac{1}{2}g_{,}t^2;\; y = V_{,,}t + \tfrac{1}{2}g_{,,}t;\; z = V_{,,,}t + \tfrac{1}{2}g_{,,,}t^2;$$

on trouve pour la projection sur le plan xy de la courbe parcourue,

$$y^2 + \frac{g_{,,}^2}{g_{,}^2}x^2 - \frac{2g_{,,}}{g_{,}}xy + Ax + By + C = 0,$$

A, B et C étant des constantes; et on voit par la comparaison des coëfficiens de x^2 et xy, que cette projection est une parabole. La projection sur l'un des deux autres plans coordonnés aurait une équation de même forme ; ainsi la ligne parcourue est une parabole.

On peut, sans chercher les équations de projection, s'assurer que la courbe parcourue est plane, en éliminant le temps des trois équations de mouvement; ce qui conduit à une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0,$$

qui est celle d'un plan.

Si on cherche pour un instant quelconque les vîtesses parallèles aux trois axes, ou les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$, et qu'on les compose en une seule, conformément à ce qui est dit art. 106, on aura

$$v = \sqrt{[(V_{,} + g_{,}t)^2 + (V_{,,} + g_{,,}t)^2 + (V_{,,,} + g_{,,,}t)^2]},$$

et on trouvera pour la valeur de la force accélératrice dans le sens du mouvement,

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{g_{,}(V_{,} + g_{,}t) + g_{,,}(V_{,,} + g_{,,}t) + (V_{,,,} + g_{,,,}t)}{\sqrt{[(V_{,} + g_{,}t)^2 + (V_{,,} + g_{,,}t)^2 + (V_{,,,} + g_{,,,}t)^2]}},$$

ou

$$\varphi = \frac{A^2 t + B}{\sqrt{[A^2 t^2 + 2Bt + C^2]}}.$$

112. On peut simplifier les considérations précédentes, en composant les trois vîtesses initiales en une seule, et composant de la même manière les trois forces accélératrices $g_{,}$, $g_{,,}$ et $g_{,,,}$, le mouvement serait alors considéré comme résultant de la combinaison d'une vîtesse et d'une force accélératrice constante, et il aurait lieu dans un plan passant par deux lignes qui se couperaient à l'origine et feraient avec les axes des x,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$V_{,}$, $V_{,,}$, $V_{,,,}$ sont les vîtesses primitives. $g_{,}$, $g_{,,}$, $g_{,,,}$ sont des forces accélératrices constantes.		50. Un point matériel étant animé, parallélement aux trois axes coordonnés, par des forces accélératrices constantes, combinées avec des vîtesses initiales, les projections de la courbe décrite sont des paraboles, tous ses points sont dans le même plan ; cette courbe est une parabole.	67. Un point matériel étant animé, parallélement aux trois axes coordonnés, par des forces accélératrices constantes, combinées avec des vîtesses initiales, trouver les équations des projections de la courbe décrite, la vîtesse et la force accélératrice à un instant quelconque.
a, b et c sont trois constantes.			
v = vîtesse dans la direction du mouvement.			
φ = force accélératrice dans la direction du mouvement. $A^2 = g_{,}^2 + g_{,,}^2 + g_{,,,}^2$ $B = g_{,}V_{,} + g_{,,}V_{,,} + g_{,,,}V_{,,,}$ $C^2 = V_{,}^2 + V_{,,}^2 + V_{,,,}^2$.		51. Les trois mouvemens uniformément accélérés, imprimés, parallélement aux trois axes, à un point matériel, avec des vîtesses initiales, peuvent toujours se réduire à deux mouvemens, l'un	

y et z, des angles dont les cosinus seraient respectivement,

pour la 1.re ligne $\frac{V_{\prime}}{\sqrt{(V_{\prime}^2+V_{\prime\prime}^2+V_{\prime\prime\prime}^2)}}$, $\frac{V_{\prime\prime}}{\sqrt{(V_{\prime}^2+V_{\prime\prime}^2+V_{\prime\prime\prime}^2)}}$, $\frac{V_{\prime\prime\prime}}{\sqrt{(V_{\prime}^2+V_{\prime\prime}^2+V_{\prime\prime\prime}^2)}}$;

pour la 2.e ligne $\frac{g_{\prime}}{\sqrt{(g_{\prime}^2+g_{\prime\prime}^2+g_{\prime\prime\prime}^2)}}$, $\frac{g_{\prime\prime}}{\sqrt{(g_{\prime}^2+g_{\prime\prime}^2+g_{\prime\prime\prime}^2)}}$, $\frac{g_{\prime\prime\prime}}{\sqrt{(g_{\prime}^2+g_{\prime\prime}^2+g_{\prime\prime\prime}^2)}}$.

Le cosinus de l'angle formé par ces deux lignes, serait, au commencement du mouvement, égal à $\frac{B}{AC}$; la vîtesse, dans le sens de la première, serait C, et la force accélératrice, dans le sens de la seconde, serait A.

113. La propriété qu'a le mouvement précédemment analysé, de donner des trajectoires planes, s'étend à une infinité de mouvemens, dans lesquels les espaces parcourus seraient des fonctions quelconques du temps, et dont les équations sont de la forme

$$x = a_{\prime} f(t) + b_{\prime} ff(t)$$
$$y = a_{\prime\prime} f(t) + b_{\prime\prime} ff(t)$$
$$z = a_{\prime\prime\prime} f(t) + b_{\prime\prime\prime} ff(t),$$

$f(t)$ et $ff(t)$ étant des fonctions quelconques de t; en éliminant $f(t)$ et $ff(t)$ de ces équations, on parvient à une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0,$$

qui est celle du plan dans lequel le mouvement a lieu.

114. La théorie du mouvement des projectiles dans le vide, n'est qu'un cas très-particulier de la théorie précédente; on a pour les équations des mouvemens horizontal et vertical,

$$x = t(2gh)^{\frac{1}{2}} \cos. \theta; \quad z = t(2gh)^{\frac{1}{2}} \sin. \theta - \tfrac{1}{2}gt^2;$$

éliminant t de ces équations, il viendra

$$z = x \text{ tang. } \theta - \frac{x^2}{4h \cos.^2 \theta}.$$

Le mobile rencontre la ligne horizontale aux points correspondans à $x = 0$ et $x = 2h \sin. (2\theta)$: cette dernière valeur est celle de ce qu'on nomme l'*amplitude du jet*; et on voit que, pour une vîtesse initiale donnée, la plus grande *amplitude* a lieu lorsque $\theta = \frac{1}{4}\pi$; la plus grande élévation verticale correspond à $x = h \sin. (2\theta)$ et a pour valeur $h \sin.^2 \theta$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		uniforme, l'autre uniformément accéléré, dirigés suivant des lignes qui se coupent à l'origine, et dont les inclinaisons se déterminent dans tous les cas.	
f et ff sont les signes de fonctions.		52. Si l'on imprime à un point matériel parallélement aux trois axes, trois mouvemens dont les équations soient respectivement $x = a_{,} f(t) + b_{,} ff(t)$ $y = a_{,,} f(t) + b_{,,} ff(t)$ $z = a_{,,,} f(t) + b_{,,,} ff(t)$, la courbe décrite par ce point sera une courbe plane, $f(t)$ et $ff(t)$ étant des fonctions quelconques de t.	
U = vîtesse initiale d'un point matériel pesant, dont le mouvement a lieu dans le plan des xz; ce plan est supposé vertical et l'axe des z horizontal. θ = angle formé par la direction de U et par l'axe horizontal des x. h = hauteur due à la vîtesse U. g = la force accélératrice due à la pesanteur ; ce qui donne $U = \sqrt{(2gh)}$. π = la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.			68. Un point matériel pesant, étant lancé dans le vide, dans la direction d'une ligne qui fait un angle donné avec l'horizon, et avec une vîtesse initiale pareillement donnée, trouver, 1.° l'équation de la courbe décrite par ce point; 2.° l'*amplitude* du jet; 3.° sous quel angle il faut lancer le mobile, afin que, pour une vîtesse initiale donnée, l'*amplitude* soit un *maximum*; 4.° la plus grande hauteur initiale à laquelle s'élève le mobile.

115. Le mouvement étant quelconque, on a, au bout du temps t, la vîtesse le long de la courbe décrite . . . . $u = \frac{ds}{dt}$

les trois vîtesses parallélement aux x, y et z . . . . . $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$

la force accélératrice dans le sens de la courbe . . . . $\frac{du}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$

celles parallèles aux x, y et z . . . . $\frac{d^2 x}{dt^2}$; $\frac{d^2 y}{dt^2}$; $\frac{d^2 z}{dt^2}$.

Cosinus des trois angles formés par la direction du mouvement et les axes . . . .

$$\begin{cases} \text{des } x \ldots \cos \alpha = \frac{1}{u} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \\ \text{des } y \ldots \cos. \beta = \frac{1}{u} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \\ \text{des } z \ldots \cos. \gamma = \frac{1}{u} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds}; \end{cases}$$

d'où on déduit la conclusion énoncée au théorème 53.

116. Il est aisé maintenant de donner les équations générales du mouvement d'un point matériel sollicité par des puissances quelconques. Ces équations sont

$$P \cos. \alpha = \frac{d^2 x}{dt^2} m; \quad P \cos. \beta = \frac{d^2 y}{dt^2} m; \quad P \cos. \gamma = \frac{d^2 z}{dt^2} m,$$

qu'on peut écrire ainsi,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} m - X = 0; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} m - Y = 0; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} m - Z = 0,$$

m peut être pris pour unité; on peut aussi, m étant quelconque, diviser les deux membres de chaque équation par la masse, et alors les premiers membres ne contiendront que des forces accélératrices.

117. Ces équations fournissent une première conséquence très-remarquable : si l'on considère P comme une force accélératrice, on a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \cos. \alpha = P' \cos. \alpha' \cos. \alpha + P'' \cos. \alpha'' \cos. \alpha + \&c.$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \cos. \beta = P' \cos. \beta' \cos. \beta + P'' \cos. \beta'' \cos. \beta + \&c.$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \cos. \gamma = P' \cos. \gamma' \cos. \gamma + P'' \cos. \gamma'' \cos. \gamma + \&c.;$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
s = la longueur de l'arc de courbe parcouru. u = la vîtesse au bout du temps t dans le sens de la courbe. α, β et γ sont les angles formés par la direction de u et par les axes des x, y et z. $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles formés par la tangente à la courbe parcourue et par les axes des x, y et z.		53. Un point matériel étant sollicité par des puissances et décrivant une courbe, quelconques, si à un instant de son mouvement les puissances cessent d'agir sur lui, il continuera à se mouvoir uniformément avec la vîtesse qu'il avait à cet instant, et dans la direction de la tangente, menée à la courbe qu'il décrivait, au point où les puissances ont cessé d'agir sur lui.	
P = résultante de toutes les puissances qui agissent sur le point matériel. α, β et γ sont les angles formés par la direction de P et par les axes des x, y et z. m = la masse du point sollicité par la puissance P. X, Y et Z sont les composantes de P parallèles aux axes des x, y et z.			69. Un point matériel étant sollicité par des puissances en nombre et quantité quelconques, trouver les trois équations générales de son mouvement.
P', P'' &c. sont les composantes de P; α', α'' &c., β', β'' &c., γ', γ'', &c., angles formés par la direction de chaque force et par les trois axes.			

on trouve d'un autre côté, pour les cosinus des angles formés par la tangente de la ligne parcourue et par la direction de chaque force, les équations

$$\cos.\theta' = \cos.\alpha \cos.\alpha' + \cos.\beta \cos.\beta' + \cos.\gamma \cos.\gamma'$$
$$\cos.\theta'' = \cos.\alpha \cos.\alpha'' + \cos.\beta \cos.\beta'' + \cos.\gamma \cos.\gamma''$$
&c. &c.

qui, combinées avec les précédentes, donnent

$$u = A + \tfrac{1}{2}\int\{P'\cos.\theta' + P''\cos.\theta'' + \&c.\}\,dt.$$

On voit, par cette équation, que les forces perpendiculaires à la tangente n'influent en rien sur la vîtesse; et qu'ainsi le point matériel étant assujetti à se mouvoir dans un canal curviligne, la résistance des parois de ce canal ne diminuera rien de sa vîtesse.

Si, dans cette dernière hypothèse, le point était abandonné à une impulsion primitive, il conserverait constamment la vîtesse A qu'il aurait eue au premier instant dans le sens de la tangente à l'origine de la courbe qu'il serait assujetti à parcourir.

On voit encore que toutes les puissances qui n'entrent pas dans les termes $P'\cos.\theta' + P''\cos.\theta'' + \&c.$, sont employées à presser la paroi du canal sur laquelle elles agissent à angle droit.

118. Les équations de l'art. 116 servent en général à faire connaître la courbe parcourue en vertu de puissances données, ou à trouver les puissances qui feraient parcourir une courbe donnée; mais on en déduit immédiatement des propriétés générales du mouvement, qu'il est important de connaître. Voici d'abord celles des *aires* données par les équations

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} + \int\{dt\,(Xy - Yx)\} = a_{,}\,; \quad \frac{x\,dz - z\,dx}{dt} + \int\{dt\,(Xz - Zx)\} = a_{,,}\,;$$
$$\frac{y\,dz - z\,dy}{dt} + \int\{dt\,(Yz - Zy)\} = a_{,,,}\,,$$

$\frac{x\,dy - y\,dx}{2}$, $\frac{x\,dz - z\,dx}{2}$ et $\frac{y\,dz - z\,dy}{2}$ sont respectivement les projections sur les plans xy, xz et yz de l'aire décrite, pendant l'instant dt, par le rayon vecteur du mobile.

$Xy - Yx$, $Xz - Zx$ et $Yz - Zy$ sont les *momens* des puissances qui sollicitent le mobile (en prenant le mot *moment* dans l'acception de

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
θ', θ'', &c., angles formés par la direction du mouvement, qui est celle de la tangente à la courbe parcourue, et par la direction de chaque puissance.			70. Trouver la somme des composantes qui, à un instant quelconque, agissent dans le sens de la tangente à la courbe parcourue par le mobile.
α, β, γ, angles formés par la tangente ou par la direction du mouvement et par les axes;		54. Le mobile étant assujetti à se mouvoir le long d'une courbe quelconque, plane ou non, la pression qu'il exercera sur cette courbe ne diminuera rien de sa vîtesse.	
A est une constante introduite par l'intégration, qui se rapporte à la vîtesse initiale.			
		55. On déduit des équations du mouvement d'un point matériel, plusieurs conséquences générales : 1.° Les valeurs des projections, sur les plans coordonnés, des aires décrites par le rayon vecteur du point mobile ;	
$a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ sont des constantes, et toutes les autres lettres de l'article 118 ont la même signification qu'à l'article 116.			71. Trouver les projections, sur les plans coordonnés, des aires instantanées décrites par le rayon vecteur du point mobile : 1.° Lorsqu'il est sollicité par des puissances quelconques ;

l'art. 59), prises respectivement par rapport aux axes des z, des y et des x. Ainsi les termes affectés du signe $\int$ dans les équations précédentes, s'évanouiront, 1.° lorsque le mobile abandonné à une impulsion primitive ne sera sollicité par aucune puissance ; ce qui donne $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = 0$: 2.° lorsqu'il sera sollicité par des puissances dirigées vers l'origine des coordonnées, cas auquel les momens sont nuls. On aura donc, dans l'un et l'autre de ces deux cas,

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = a_{\prime}\,;\quad \frac{x\,dz - z\,dx}{dt} = a_{\prime\prime}\,;\quad \frac{y\,dz - z\,dy}{dt} = a_{\prime\prime\prime}.$$

Les aires décrites pendant le temps t seront proportionnelles à ce temps : on verra, art. 127, une application de ce principe. Dans le premier des deux cas ci-dessus, celui où on a $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = 0$, la proportionnalité des aires aux temps, a lieu, quel que soit le point de l'espace qu'on prenne pour origine des coordonnées.

119. On déduit encore des équations de l'art. 116, la suivante :

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = C + 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

L'expression $\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ est une différentielle exacte, toutes les fois que les puissances sollicitantes sont fonctions des distances entre le point matériel qu'elles sollicitent, et d'autres points pris sur leurs directions respectives ; et ce cas est en général celui de la nature : on a, lorsqu'il a lieu,

$$v^2 = C + 2\varphi.$$

Lorsque le corps est abandonné à une impulsion primitive, on a constamment $v^2 = C$.

120. Enfin, si le corps se meut ou librement dans l'espace, ou sur une surface courbe, sans être assujetti à y suivre une trace déterminée, telle que serait la direction d'une rainure ou d'un canal, la courbe qu'il décrit, comparée à une autre courbe quelconque, dans le premier cas, et à une quelconque de celles qu'on peut tracer sur la surface où le mouvement a lieu, dans le second cas, donne cette équation remarquable, qui se rapporte au principe de la *moindre action :*

$$\delta\int v\,ds = A + \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		2.° La propriété qu'ont les projections de ces aires d'être proportionnelles au temps pendant lequel elles sont décrites, lorsque le mobile ou se meut, avec une vîtesse constante, en vertu d'une impulsion primitive, ou est sollicité par des puissances dont les directions passent par l'origine des coordonnées ;	2.° Lorsque les directions des puissances sollicitantes passent par l'origine des coordonnées, ou que le point mobile, abandonné à une impulsion primitive, se meut avec une vîtesse constante.
$v =$ la vîtesse au point de la courbe décrite qui a x, y et z pour coordonnées. $C =$ une constante. $\varphi = \int (X dx + Y dy + Z dz)$.		3.° La valeur du carré de la vîtesse, d'où on déduit celle de la force vive ;	72. Trouver l'expression générale du carré de la vîtesse ; d'où on déduit celle de la force vive.
$ds =$ l'élément de la courbe décrite par le point mobile. $A =$ une constante. δ est le signe de variation indiquant qu'on passe de la courbe décrite par le point		4.° La propriété qu'a $\int (v ds)$ d'être un *minimum* ;	73. Trouver l'expression générale de la variation de $\int (v ds)$, et sa valeur définie entre deux points déterminés de la courbe parcourue par le mobile.

Entre deux points déterminés de la courbe décrite, supposés invariables, ou pour lesquels on a $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, l'équation précédente devient $\delta . \int v ds = 0$; c'est-à-dire que tout mouvement libre d'un point matériel, soit dans l'espace absolu, soit sur une surface, a cette belle propriété que l'intégrale $\int v ds$ est un *minimum*.

Lorsque le point se meut sur une surface courbe en vertu d'une impulsion primitive, on sait que v est constante. Le principe de la *moindre action* donne donc alors $\delta . \int ds = 0$; c'est-à-dire que le mobile arrive, d'un point quelconque de la courbe qu'il décrit, à un autre de la même courbe, par le plus court chemin qu'on puisse tracer, entre ces deux points, sur la surface où il est assujetti à se mouvoir. Le plan, passant par deux élémens consécutifs de cette courbe, pour laquelle on a l'équation $\frac{ddz}{ddy} = \frac{p dz + dx}{p dy - q dx}$ est toujours perpendiculaire à la surface sur laquelle elle est tracée. Les lignes connues en géographie sous le nom de *perpendiculaires à la méridienne*, sont de la nature de celle dont je viens de parler.

121. K étant une fonction de x, y et z, et $K = 0$ l'équation de la surface sur laquelle le point matériel est assujetti à se mouvoir, la pression normale qu'il exercera contre cette surface, aura pour valeur,

$$N = \frac{(dp dx + dq dy) v^2}{ds^2 \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} + \frac{Xp + Yq - Z}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}.$$

La première partie de la valeur de N ne dépend que de la vîtesse : la seconde partie de la même valeur est donnée par l'action des puissances ; et si le point se meut seulement en vertu d'une impulsion primitive, on aura $r = [ds^2 \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}] : (dpdx + dqdy)$, et dans ce cas

$$N = \frac{v^2}{r}.$$

On peut déduire de cette valeur, la seconde des propriétés énoncées à la fin de l'article précédent.

Si le point matériel est assujetti à se mouvoir dans un canal infiniment étroit, de courbure quelconque, la pression normale qu'il exercera contre la paroi de ce canal, se déduira de la vîtesse combinée avec l'action

NOTATION.

mobile, à une autre courbe infiniment voisine, qui a d'ailleurs une trace entièrement arbitraire lorsque le point se meut librement, et qui, lorsque le point est assujetti à se mouvoir sur une surface, doit être tracée sur la même surface. Les points où δx, δy et δz sont nuls, répondent aux intersections de la courbe décrite et de la courbe arbitraire.

dx, dy et dz sont des différentielles qui se rapportent à deux points infiniment voisins de la courbe décrite par le point mobile.

On déduit de l'équation $K = 0$

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right),\ q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

p et q étant chacun fonctions de x et y.

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\left(\frac{dK}{dx}\right) : \left(\frac{dK}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\left(\frac{dK}{dy}\right) : \left(\frac{dK}{dz}\right).$$

v = la vîtesse du mobile dans le sens de la courbe qu'il décrit.

r = le rayon osculateur de cette courbe, au point où se trouve le mobile.

N = la pression que le mobile exerce sur la surface.

Voyez, art. 260, les cosinus des angles formés par la direction de N et par chacun des axes. Ce sont les quantités $c_{,}$, $c_{,,}$ et $c_{,,,}$ ci-après.

DÉFINITIONS.

THÉORÈMES.

5.° La pression que le point matériel exerce contre une surface ou une ligne sur laquelle il est assujetti à se mouvoir, en supposant, ou qu'il est sollicité par des puissances, ou qu'il se meut avec une vîtesse constante, en vertu d'une impulsion initiale;

PROBLÈMES.

74.

Déterminer les propriétés générales et caractéristiques de la courbe décrite par un point matériel, lorsque, livré à une impulsion primitive, et n'étant sollicité par aucune puissance, il est assujetti à se mouvoir sur une surface courbe.

75.

Le point mobile étant assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une ligne quelconque, déterminer la valeur de la *force centrifuge*, ou de la pression normale qu'il exerce contre cette surface ou contre cette ligne, soit que des puissances quelconques le sollicitent, ou que, livré à une impulsion primitive, il se meuve avec une vîtesse constante; et appliquer la solution de la seconde partie du problème, au cas où le point matériel se meut sur une circonférence de cercle.

des puissances. Nous avons vu, art. 96, comment s'évalue la pression due à cette action, quand il s'agit d'une courbe à double courbure ; si le corps se meut sur une courbe plane située dans le plan xz, on déduit des équations de l'article précédent,

$$N = \frac{v^2}{r} + \frac{Xdz - Zdx}{ds}.$$

N peut être considérée comme une puissance particulière agissant sur le corps, et, sous ce point de vue, les valeurs de ses composantes ou ses produits respectifs par $c_{\prime}$, $c_{\prime\prime}$, et $c_{\prime\prime\prime}$ étant introduits dans les formules de l'art. 116, les équations qu'on obtiendra donneront les circonstances du mouvement comme si le corps était libre. Autrement, introduisant N comme une puissance inconnue en quantité, mais connue en direction, dans les trois équations, art. 116, et l'éliminant ensuite, ces trois équations se réduiront à deux, qui, avec celle $K' = 0$, rempliront le même objet.

122. N mesure ce qu'on appelle la *force centrifuge*, qui, lorsque le mobile décrit un cercle avec une vîtesse constante, a pour valeur $V^2 : R$ ou $2gH : R$, ou enfin $\vartheta^2 R$.

123. Les problèmes qui se rapportent au pendule simple, fournissent une application intéressante de la théorie du mouvement d'un point matériel. Prenons d'abord le cas où le pendule se meut dans un plan vertical ; ce cas peut être assimilé à celui où un point matériel pesant est obligé de se mouvoir sur un arc de cercle situé dans un plan vertical. Comptant les x à partir du point le plus bas sur la verticale qui passe par le point de suspension, la relation entre l'espace parcouru et le temps, et celle entre la force accélératrice angulaire et l'angle décrit, sont données par les équations

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2g(b-x)]}},$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{g}{a} \sin.\ \theta.$$

La première convient à une courbe quelconque. La vîtesse initiale doit entrer dans la valeur de la constante qui complète l'intégrale.

124. On en déduit, pour la valeur du temps employé par le pendule

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
ds = l'élément de la courbe parcourue. $c_{,} = -p : \sqrt{(1+p^2+q^2)}$ $c'' = -q : \sqrt{(1+p^2+q^2)}$ $c_{,,,} = 1 : \sqrt{(1+p^2+q^2)}$.		6.° Ce que devient cette pression lorsque le corps est assujetti à se mouvoir sur une courbe plane ;	
V = la vîtesse constante dans le cercle parcouru par le mobile. H = la hauteur due à V. γ = la *vîtesse angulaire*, ou l'angle $\frac{V}{R}$ décrit par le mobile, pendant chaque unité de temps. R = le rayon du cercle décrit.	25. De la force centrifuge. 26. De la vîtesse angulaire.	7.° Enfin, sa valeur lorsque le mobile décrit un cercle avec une vîtesse constante, cas auquel la force centrifuge est réciproquement proportionnelle au rayon de ce cercle, et directement proportionnelle au carré de la vîtesse. Dans les cas où l'on a à comparer les forces centrifuges de plusieurs masses différentes, il faut, aux valeurs de l'art. 122, substituer les produits de ces valeurs par les masses respectives	
s = un arc variable commençant et finissant avec x. A = un arc donné qui a la même origine que x. b = la valeur de x correspondante à l'extrémité de A. a = le rayon du cercle décrit. f et θ sont respectivement la valeur angulaire de A et celle de l'arc s. γ = la vîtesse angulaire. π = la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon.	27. Du pendule simple.		76. Un point matériel pesant, étant assujetti à se mouvoir sur une courbe plane située dans un plan vertical, trouver la valeur du temps employé à décrire un arc quelconque de cette courbe.

simple à décrire un arc dont le sinus verse $= \frac{b}{a}$,

$$t = \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{b}{2a} + \frac{1 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{b^2}{2^2 \cdot a^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{b^3}{2^3 \cdot a^3} + \&c. \right\} \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}.$$

Le commencement et la fin de cet arc correspondent aux valeurs $x = b$ et $x = 0$; la vîtesse initiale est nulle.

Le temps de l'oscillation entière est double de celui qu'on vient de déterminer.

En conservant l'hypothèse de la vîtesse initiale nulle, la relation entre la vîtesse angulaire et l'arc parcouru, est donnée par l'équation

$$\gamma = \sqrt{\left[\frac{2g}{a}(\cos.\ \theta - \cos.\ f)\right]}.$$

125. Dans le cas des oscillations infiniment ou extrêmement petites, on a, pour l'oscillation entière, $t = \pi \sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}$.

Le temps de l'oscillation ne dépend plus de la valeur angulaire de l'arc, et l'*isochronisme* a lieu.

On peut traiter immédiatement le cas des petites oscillations, en observant que, dans ce cas, les phénomènes du mouvement sont représentés par l'intégrale de l'équation $\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{g}{a}(k - \omega)$,

qui donne $\omega = k \left\{ 1 - \cos. \left[t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)} \right] \right\}$.

Cette équation, par les divers signes dont le cosinus est susceptible, représente très-bien le mouvement oscillatoire, et donne les circonstances de ce mouvement à un instant quelconque de sa durée. La durée de l'oscillation se trouve en faisant $\pi = t \sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}$; d'où $t = \pi \sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)}$, comme ci-dessus.

126. Cette équation donne lieu à quelques conséquences qui peuvent être utiles. Deux des principales sont, 1.° la manière de comparer les longueurs des pendules, par les temps employés à faire un même nombre d'oscillations, au moyen de la formule $a = \frac{g}{\pi^2} t^2$;

2.° la détermination de la force accélératrice de la pesanteur, au moyen d'un pendule dont on a mesuré la longueur avec beaucoup de précision, et dont la durée des oscillations est très-exactement déterminée, $g = \frac{\pi^2}{t^2} a$.

127. Lorsque les oscillations du pendule ne se font pas dans le même

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			77. Déterminer, 1.° le temps employé par le pendule simple à parcourir un arc de grandeur donnée ; 2.° La relation entre la vîtesse angulaire et l'arc parcouru.
		56. Les oscillations du pendule sont isochrones, lorsque les arcs décrits sont infiniment petits.	78. Appliquer la solution du problème précédent au cas où les oscillations sont infiniment ou extrêmement petites.
	28. De l'isochronisme.		
k est la valeur angulaire de la moitié du petit arc parcouru pendant une oscillation. ω est l'angle décrit au bout du temps t.			
		57. Les longueurs des pendules sont proportionnelles aux carrés des temps employés à faire un même nombre de petites oscillations.	79. Déduire des expériences sur le pendule, la valeur de la force accélératrice de la pesanteur. 80. Trouver les équations du mouvement d'un pendule à oscillations coniques.

plan, le point matériel pesant, qui est supposé lié à un fil inextensible et sans pesanteur, est continuellement sur une surface sphérique qui a la longueur du fil pour rayon.

Le plan des xy, est le plan horizontal passant par le point de suspension, et les z se comptent au-dessous et à partir du même point de suspension sur la verticale qui passe par ce point, origine commune des coordonnées x, y, z; cela posé, les formules générales du mouvement de l'article 116, donnent, en y ajoutant art. 121 les termes qui dérivent de la condition que le mouvement a lieu sur une surface sphérique,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}R; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-y}{r}R; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{z}{r}R;$$

on a de plus l'équation de la surface courbe $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. L'élimination de R, combinée avec l'équation de la surface courbe, donne, en effectuant une première intégration,

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = m; \quad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} = g(z - k);$$

m et gk sont deux constantes introduites par l'intégration; la seconde équation donne la valeur de la force vive à un instant quelconque.

Introduisant dans ces équations le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées au pied de z, on a

$$\frac{-\rho^2 d\varphi}{dt} = m; \quad \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2}{2dt^2} = g(z - k).$$

L'équation $\frac{\rho^2 d\varphi}{dt} = -m$, satisfait au *principe des aires*, et fait voir que celles décrites par le rayon vecteur, sont proportionnelles au temps; c'est le principe énoncé théorème 55, n.° 2.

La valeur de la tension du fil est donnée par l'équation

$$R = \frac{g(3z - 2k)}{r};$$

et pour avoir la relation entre le temps et la distance z du mobile au plan xy, il faut intégrer l'équation

$$dt = \frac{rdz}{\sqrt{[2g(r^2 - z^2)(z - k) - m^2]}}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
R = la tension du fil. r = le rayon de la sphère ou la longueur du fil.			
			81. Trouver l'expression de la force vive dans le mouvement du pendule à oscillations coniques.
ρ rayon vecteur mené de l'origine au point où z rencontre le plan $x\,y$. φ angle de ρ et de l'axe des x.	29. De ce qu'on entend par le *principe des aires*.	58. Le principe de la conservation des aires a lieu dans le mouvement d'un pendule à oscillations coniques.	
			82. Trouver la valeur de la tension du fil dans le mouvement d'un pendule à oscillations coniques. 83. Trouver l'équation différentielle dont l'intégration donnerait la re-

128. On peut, sans intégrer cette équation, en déduire des conséquences curieuses : en effet, observant que l'équation $\frac{dz}{dt} = 0$ donne les plus grandes et les plus petites valeurs de z, ou en général les valeurs de z correspondantes aux points où la vîtesse verticale est nulle, et nommant a, b et c respectivement la plus petite, la plus grande et la moyenne valeur de z qui correspondent à $\frac{dz}{dt} = 0$, on parvient aux équations

$$a - b - c - k = 0;\ ac - ab + bc - r^2 = 0;\ abc - \frac{1}{2g} m^2 - kr^2 = 0,$$

qui donnent les rapports entre a, b, c, k et m.

On a ensuite les équations

$$dt = \frac{r\,dz}{\sqrt{[2g(z-a)(b-z)(z+c)]}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-\sqrt{[2g(r^2-a^2)(r^2-b^2)]}}{(r^2-z^2)\sqrt{(a+b)}}.$$

Lorsque le mobile décrit un petit cercle de la sphère parallèle au plan xy, la dernière équation devient

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}.$$

129. Quant à l'équation $dt = \frac{r\,dz}{\sqrt{[2g(z-a)(b-z)(z+c)]}}$, son intégration ne présente pas plus de difficulté que celle de l'équation de l'art. 123; mais il sera curieux d'assigner, sans avoir recours aux suites, deux intégrales limites entre lesquelles se trouve la valeur de t, et qui sont

$$t > \frac{2r}{\sqrt{[2g(b+c)]}} \text{ arc tang. } \frac{z-a}{b-z};\ t < \frac{2r}{\sqrt{[2g(a+c)]}} \text{ arc tang. } \frac{z-a}{b-z}.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter à ces équations, si on suppose que l'on compte $t = 0$, lorsque le pendule est au point le plus haut ou lorsque $z = a$. Pour obtenir ensuite le temps entier de la descente du point le plus haut au point le plus bas, on a

$$t > \frac{r\pi}{\sqrt{[2g(b+c)]}};\ t < \frac{r\pi}{\sqrt{[2g(a+c)]}}.$$

Dans le cas des oscillations infiniment petites, ces deux inégalités coïncident et donnent les mêmes résultats trouvés art. 125.

130. On peut encore appliquer les formules du mouvement d'un point matériel à la solution de différens problèmes utiles ou curieux.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			lation entre le temps et l'espace parcouru verticalement dans le mouvement du pendule à oscillations coniques.
			84. Introduire dans l'équation demandée par le problème précédent, les valeurs de z correspondantes aux points où les vîtesses verticales sont nulles.
			85. Trouver l'équation dont l'intégration doit donner la relation entre le temps et la vîtesse angulaire autour de l'axe des z ; appliquer cette équation au cas où le mobile décrit un petit cercle horizontal de la sphère.
			86. Assigner, en valeurs finies, deux inégalités qui donnent les limites du temps.
π = la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon. Les y se comptent, à partir du point le plus bas de la cycloïde, sur le petit axe de cette courbe.			87. Trouver le temps de la descente d'un point matériel pesant sur un arc de cycloïde.

Si une cycloïde est tracée sur un plan vertical, et que son grand axe soit horizontal, le temps employé par un point matériel pesant à descendre le long de cette courbe de la hauteur $b - y$, sera

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \,.\text{arc cosinus}\left(\frac{2y - (h + b)}{h + b}\right).$$

Lorsque la vîtesse initiale est zéro, et qu'on veut avoir le temps de la descente jusqu'au point le plus bas, on trouve

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{g}\right)};$$

le temps est constant et indépendant du point du départ; ce qui constitue la propriété des courbes *tautochrones.*

131. Deux points étant donnés de position, on peut vouloir assigner quelle est, parmi toutes les courbes qu'on peut tracer de l'un à l'autre point, celle le long de laquelle un point matériel pesant arriverait le plutôt du point supérieur au point inférieur, la vîtesse initiale étant nulle. L'équation de cette courbe est

$$y = -\sqrt{(ax - xx)} + \int \frac{\tfrac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{(ax - x^2)}}.$$

C'est encore une cycloïde dont le petit axe a est vertical, les x étant verticales, et l'origine des coordonnées à une des extrémités de l'axe horizontal; considérée sous ce point de vue, elle est courbe *brachistochrone.*

132. Enfin, si on cherche une courbe tracée dans un plan vertical, telle qu'un point matériel pesant m, qui glisserait le long de cette courbe, exercerait normalement sur elle une pression constante, on parviendra à l'équation

$$dx = \frac{dy\left\{\frac{m'}{m}(h + y)^{\frac{1}{2}} + A\right\}}{\left\{h + y - \left[\frac{m'}{m}(h + y)^{\frac{1}{2}} + A\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$\frac{m'}{m}$ est le rapport de la pression constante au poids du mobile; h la hauteur due à la vîtesse initiale; A une constante qui dépend de l'inclinaison de la courbe à son origine, et qui est donnée par l'équation

$$A = \left(k - \frac{m'}{m}\right)\sqrt{(h)},$$

k étant le sinus de l'angle arbitraire que la courbe fait avec la verticale au point de départ.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
h = la hauteur due à la vîtesse initiale dans le sens de la courbe. b = la valeur de y correspondante au point du départ. $\frac{1}{2} a$ = le diamètre du cercle générateur.	30. Du tautochronisme.	59. La cycloïde est une courbe tautochrone.	
	31. Des courbes brachistochrones.	60. La cycloïde est une courbe brachistochrone.	88. Deux points étant donnés de position, tracer une courbe de l'un à l'autre, le long de laquelle un point matériel pesant arrivera dans le moins de temps possible, du point le plus haut au point le plus bas, la vîtesse initiale étant nulle.

SECONDE PARTIE.

MÉCANIQUE DES CORPS SOLIDES.

PREMIÈRE SECTION.

STATIQUE.

133. La statique est la partie de la mécanique qui, faisant abstraction du temps, ne considère que les actions réciproques des puissances, appliquées à un système de points massifs et de corps, telles que les efforts résultant de ces actions se détruisent réciproquement, et que le système reste immobile.

134. Cherchant d'abord les conditions de l'équilibre d'un système ou d'un corps de figure invariable, dont chaque point est sollicité par des puissances de quantités et directions quelconques, on commence par ramener la question à celle où il s'agirait de forces dirigées dans un même plan et de forces à directions parallèles, et on trouve que l'état du système dont il s'agit, est le même que s'il était sollicité par des puissances dirigées perpendiculairement au plan $x\ y$,

$$P_{,} \cos. \gamma_{,}\,;\ P_{,,} \cos. \gamma_{,,}\,;\ P_{,,,} \cos. \gamma_{,,,}\ \&c.,$$

et par des puissances agissant dans le plan x, y,

$$\text{parallélement} \begin{cases} \text{aux } x \ldots P_{,} \cos. \alpha_{,}\,;\ P_{,,} \cos. \alpha_{,,}\,;\ P_{,,,} \cos. \alpha_{,,,}\ \&c. \\ \text{aux } y \ldots P_{,} \cos. \beta_{,}\,;\ P_{,,} \cos. \beta_{,,}\,;\ P_{,,,} \cos. \beta_{,,,}\ \&c. \end{cases}$$

Toutes ces puissances étant appliquées à des points de ce plan dont les coordonnées sont respectivement

$$\text{parallélement} \begin{cases} \text{aux } y \ldots \dfrac{y_{,} \cos. \gamma_{,} - z_{,} \cos. \beta_{,}}{\cos. \gamma_{,}}\,;\ \dfrac{y_{,,} \cos. \gamma_{,,} - z_{,,} \cos. \beta_{,,}}{\cos. \gamma_{,,}}\,;\ \dfrac{y_{,,,} \cos. \gamma_{,,,} - z_{,,,} \cos. \beta_{,,,}}{\cos. \gamma_{,,,}}\ \&c. \\ \text{aux } x \ldots \dfrac{x_{,} \cos. \gamma_{,} - z_{,} \cos. \alpha_{,}}{\cos. \gamma_{,}}\,;\ \dfrac{x_{,,} \cos. \gamma_{,,} - z_{,,} \cos. \alpha_{,,}}{\cos. \gamma_{,,}}\,;\ \dfrac{x_{,,,} \cos. \gamma_{,,,} - z_{,,,} \cos. \alpha_{,,,}}{\cos. \gamma_{,,,}}\ \&c. \end{cases}$$

135. Appliquant à ces considérations la théorie et les formules des art. 71, 77 et 78 relatives aux forces à directions parallèles, et à celles qui

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	32. De la statique.		
$P_{,}$, $P_{,,}$, &c., forces motrices, ou produits de chaque masse par la force accélératrice, que cette masse (supposée libre) recevrait de la puissance qui agit sur elle.			89. (*) Trouver les équations des projections de la direction d'une puissance, et les points où cette direction rencontre les plans coordonnés.
$\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, &c.; $\beta_{,}$, $\beta_{,,}$, &c.; $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, &c. angles que font les directions des puissances avec les axes des x, y et z respectivement.			90. Ramener le problème de l'équilibre d'un système ou d'un corps de forme invariable, aux cas des forces à directions parallèles, et de celles agissant dans le même plan.
$x_{,}$, $x_{,,}$, &c.; $y_{,}$, $y_{,,}$, &c.; $z_{,}$, $z_{,,}$, &c. coordonnées respectives des points d'application des puissances.			

(*) *Voyez* le cinquième numéro du Journal de l'École, *pag. 200 et suivantes.*

agissent dans le même plan, on trouve, toutes réductions faites, que les conditions de l'équilibre d'un système de forme invariable sont exprimées par les six équations

$$P_{,} \cos. \alpha_{,} + P_{,,} \cos. \alpha_{,,} + P_{,,,} \cos. \alpha_{,,,} + \&c. = 0$$
$$P_{,} \cos. \beta_{,} + P_{,,} \cos. \beta_{,,} + P_{,,,} \cos. \beta_{,,,} + \&c. = 0$$
$$P_{,} \cos. \gamma_{,} + P_{,,} \cos. \gamma_{,,} + P_{,,,} \cos. \gamma_{,,,} + \&c. = 0$$
$$P_{,}(y_{,} \cos. \gamma_{,} - z_{,} \cos. \beta_{,}) + P_{,,}(y_{,,} \cos. \gamma_{,,} - z_{,,} \cos. \beta_{,,}) + \&c. = 0$$
$$P_{,}(z_{,} \cos. \alpha_{,} - x_{,} \cos. \gamma_{,}) + P_{,,}(z_{,,} \cos. \alpha_{,,} - x_{,,} \cos. \gamma_{,,}) + \&c. = 0$$
$$P_{,}(x_{,} \cos. \beta_{,} - y_{,} \cos. \alpha_{,}) + P_{,,}(x_{,,} \cos. \beta_{,,} - y_{,,} \cos. \alpha_{,,}) + \&c. = 0.$$

136. On peut, dans les trois dernières équations, substituer aux coordonnées des points d'application des puissances, les plus courtes distances de leurs directions aux axes coordonnés. On a, art 59, théorème 32,

$$P_{,} p_{,} \sin. \alpha_{,} = P_{,}(y_{,} \cos. \gamma_{,} - z_{,} \cos. \beta_{,}) \ \&c.$$
$$P_{,} q_{,} \sin. \beta_{,} = P_{,}(z_{,} \cos. \alpha_{,} - x_{,} \cos. \gamma_{,}) \ \&c.$$
$$P_{,} r_{,} \sin. \gamma_{,} = P_{,}(x_{,} \cos. \beta_{,} - y_{,} \cos. \alpha_{,}) \ \&c.;$$

ce qui donne pour les trois équations dont il s'agit,

$$P_{,} p_{,} \sin. \alpha_{,} + P_{,,} p_{,,} \sin. \alpha_{,,} + \&c. = 0$$
$$P_{,} q_{,} \sin. \beta_{,} + P_{,,} q_{,,} \sin. \beta_{,,} + \&c. = 0$$
$$P_{,} r_{,} \sin. \gamma_{,} + P_{,,} r_{,,} \sin, \gamma_{,,} + \&c. = 0,$$

qui peuvent remplacer les trois dernières de l'article précédent.

137. Il est bon d'observer que les équations précédentes ont été trouvées indépendamment de toute considération relative à la tendance soit au mouvement de rotation, soit au mouvement de translation, et que la seule chose qu'on ait eue en vue, a été d'exprimer que toutes les forces appliquées au système, pouvaient, par la décomposition, se réduire à quatre forces égales, deux à deux, et directement opposées, dont deux agissent dans le plan des x, y, et les deux autres perpendiculairement à ce plan. On voit en effet, au moyen de la préparation art. 134, que c'est là tout ce que supposent les raisonnemens et les calculs précédens, et qu'on a ainsi obtenu l'avantage de ne point mêler aux notions qui se

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			91. Trouver les équations qui expriment les conditions de l'équilibre d'un système ou corps de forme invariable, sollicité par des puissances de quantité et directions quelconques.
			92. Introduire dans les équations d'équilibre demandées par le problème précédent, les plus courtes distances des directions des puissances aux axes coordonnés.

rapportent à l'équilibre, d'autres notions relatives au mouvement, qui ne servent qu'à obscurcir les premières et à embarrasser les commençans.

Mais si on veut connaître particulièrement les différens points de vue sous lesquels il faut considérer les six équations des art. 135 et 136 (les six équations des momens n'équivalent qu'à trois), il faut remarquer, 1.° que les équations $P_{,} \cos. \alpha_{,} + \&c. = 0$, $P_{,} \cos. \beta_{,} + \&c. = 0$, $P_{,} \cos. \gamma_{,} + \&c. = 0$, sont les mêmes qu'on obtiendrait, dans le cas de l'équilibre, si toutes les masses qui composent le système étaient concentrées en un seul point, et que ces équations indiqueraient alors que ce point ne peut avoir de mouvement de translation dans aucun sens. On les a, pour cette raison, nommées équations de l'*équilibre de translation*, ou qui se rapportent à l'équilibre de translation.

138. QUANT à la signification des trois autres équations, elle se déduira aisément des détails dans lesquels nous allons entrer. Soient

$$P_{,} \cos. \gamma_{,} = Q'\,;\ P_{,,} \cos. \gamma_{,,} = Q''\ \&c.$$
$$P_{,} \sin. \gamma_{,} = R'\,;\ P_{,,} \sin. \gamma_{,,} = R''\ \&c.$$
$$\frac{x_{,} \cos. \gamma_{,} - z_{,} \cos. \alpha_{,}}{\cos. \gamma_{,}} = x'\,;\ \frac{x_{,,} \cos. \gamma_{,,} - z_{,,} \cos. \alpha_{,,}}{\cos. \gamma_{,,}} = x'',\ \&c.$$
$$\frac{y_{,} \cos. \gamma_{,} - z_{,} \cos. \beta_{,}}{\cos. \gamma_{,}} = y'\,;\ \frac{y_{,,} \cos. \gamma_{,,} - z_{,,} \cos. \beta_{,,}}{\cos. \gamma''} = y'',\ \&c.$$
$$\frac{\cos. \beta_{,}}{\sin. \gamma_{,}} = \sin. \alpha'\,;\ \frac{\cos. \beta_{,,}}{\sin. \gamma_{,,}} = \sin. \alpha'',\ \&c.$$
$$\frac{\cos. \alpha_{,}}{\sin. \gamma_{,}} = \cos. \alpha'\,;\ \frac{\cos. \alpha_{,,}}{\sin. \gamma_{,,}} = \cos. \alpha'',\ \&c.$$

On aura pour les équations d'équilibre des deux groupes de forces mentionnés art. 134, qui représentent la totalité des forces appliquées au système :

Composantes perpendiculaires au plan xy.
$$\left\{\begin{array}{l} Q' + Q'' + Q''' + \&c. = 0 \\ Q'x' + Q''x'' + Q'''x''' + \&c. = 0 \\ Q'y' + Q''y'' + Q'''y''' + \&c. = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (A).$$

Composantes qui agissent dans le plan xy.
$$\left\{\begin{array}{l} R' \cos. \alpha' + R'' \cos. \alpha'' + \&c. = 0 \\ R' \sin. \alpha' + R'' \sin. \alpha'' + \&c. = 0 \\ R'(y' \cos. \alpha' - x' \sin. \alpha') + R''(y'' \cos. \alpha'' - x'' \sin. \alpha'') + \&c. = 0 \end{array}\right\} \ldots (B).$$

139. DANS le cas où il n'y a pas équilibre, les sommes précédentes ne sont pas égales à zéro; et on trouvera aisément deux forces, dont l'une,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	33. De l'équilibre de translation.		
x', y'; x'', y'', &c. coordonnées des points de rencontre des directions de chaque puissance et du plan xy.			
α', α'', &c. angles formés par l'axe des x et par les projections, sur le plan xy, des directions des puissances.			
Nota. Pour vérifier les équations ci à côté, il n'y a qu'à substituer les valeurs des quantités qui y entrent et on trouvera, toutes réductions faites, les six équations de l'art. 135.			
			93. Trouver deux forces qui fassent équilibre à

perpendiculaire au plan xy, établira l'équilibre dans le groupe (A), et dont l'autre, agissant dans le plan xy, établira l'équilibre dans le groupe (B).

On a pour la première force, art. 78,

$$Q^{(n)} = Q' + Q'' + Q''' + \&c.$$

$$x^{(n)} = \frac{Q'x' + Q''x'' + Q'''x''' + \&c.}{Q' + Q'' + Q''' \&c.}$$

$$y^{(n)} = \frac{Q'y' + Q''y'' + \&c.}{Q' + Q'' + \&c.};$$

et pour la seconde force, art. 73 et 74,

$$R = \sqrt{[(R' \cos.\alpha' + R'' \cos.\alpha'' + \&c.)^2 + (R' \sin.\alpha' + R'' \sin.\alpha'' + \&c.)^2]}$$

$$\sin.\alpha = \frac{R' \sin.\alpha' + R'' \sin.\alpha'' + \&c.}{R}$$

$$\cos.\alpha = \frac{R' \cos.\alpha' + R'' \cos.\alpha'' + \&c.}{R}$$

$$\text{tang}.\alpha = \frac{R' \sin.\alpha' + R'' \sin.\alpha'' + \&c.}{R' \cos.\alpha' + R'' \cos.\alpha'' + \&c.}$$

$$y = x \,\text{tang}.\alpha + \frac{R'(y' \cos.\alpha' - x' \sin.\alpha') + R''(y'' \cos.\alpha'' - x'' \sin.\alpha'') + \&c.}{R' \cos.\alpha' + R'' \cos.\alpha'' + \&c.}.$$

140. La dernière équation dérive de

$$R(y \cos.\alpha - x \sin.\alpha) = R'(y' \cos.\alpha' - x' \sin.\alpha') + \&c.,$$

ou parce que $y \cos.\alpha - x \sin.\alpha = r$

$$R\,r = R'(y' \cos.\alpha' - x' \sin.\alpha') + R''(y'' \cos.\alpha'' - x'' \sin.\alpha'') + \&c.$$

Si le second membre de cette équation est zéro par lui-même, on aura ou $R = 0$, ou $r = 0$; ainsi, lorsque les forces qui composent le groupe (B), quoique n'étant pas en équilibre, seront cependant telles que la troisième somme de ce groupe soit nulle, la résultante de toutes les puissances qui agissent dans le plan xy, et qui représentent toutes les composantes parallèles au plan, cette résultante, dis-je, passera par l'origine des xy, ou par l'axe des z.

D'après cela, si l'axe des z était fixe dans le système, la seule équation

$$R'(y' \cos.\alpha' - x' \sin.\alpha') + \&c. = 0$$

renfermerait toutes les conditions de l'équilibre; car, d'une part, le système ne pourrait prendre aucun mouvement par l'action des forces Q', Q'', &c., parallèles à l'axe des z; et de l'autre, l'équation dont il s'agit

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$Q^{(n)}$ = la résultante des forces perpendiculaires au plan xy. $x^{(n)}$ et $y^{(n)}$ sont les deux coordonnées de son point de rencontre avec le plan xy. *Nota.* Le signe (n) désigne un accent et non pas une puissance. R = la résultante des forces qui agissent dans le plan xy. α est l'angle que fait sa direction avec l'axe des x. x et y sont les coordonnées d'un point quelconque de sa direction. r est la perpendiculaire menée de l'origine des xy sur sa direction.			un nombre quelconque de forces agissantes sur un système ou corps de forme invariable.

indiquant que la résultante des forces R', R'', &c. passe par l'axe fixe des z, énonce rigoureusement que le système doit rester en repos.

141. Mais l'équation $R'(y' \cos. \alpha' - x' \sin. \alpha') + \&c. = 0$ est, en changeant tous les signes, identique avec celle de l'art. 135.

$$P_{,}(x_{,} \cos. \beta_{,} - y_{,} \cos. \alpha_{,}) + P_{,,}(x_{,,} \cos. \beta_{,,} - y_{,,} \cos. \alpha_{,,}) + \&c. = 0.$$

Cette équation indique donc, à elle seule, que si l'axe des z était fixe, il n'y aurait pas de mouvement; et comme lorsqu'un axe est fixe, le seul mouvement qui puisse avoir lieu est celui de rotation autour de cet axe, l'équation dont il s'agit donne les conditions de l'équilibre de rotation autour de l'axe des z supposé fixe.

On prouvera de la même manière, que des équations

$$P_{,}(x_{,} \cos. \gamma_{,} - z_{,} \cos. \alpha_{,}) + P_{,,}(x_{,,} \cos. \gamma_{,,} - z_{,,} \cos. \alpha_{,,}) + \&c. = 0$$
$$P_{,}(y_{,} \cos. \gamma_{,} - z_{,} \cos. \beta_{,}) + P_{,,}(y_{,,} \cos. \gamma_{,,} - z_{,,} \cos. \beta_{,,}) + \&c. = 0.$$

La première indique que si l'axe des y était fixe, cet axe supporterait l'effort des résultantes de toutes les puissances, et que le système serait immobile, ou ne prendrait pas le seul mouvement qui lui fût permis, celui de rotation autour de l'axe des xy.

La seconde indique la même chose pour l'axe des x.

142. Enfin, lorsque les trois dernières équations de l'art. 135 ont lieu ensemble, cette réunion indique que si le point commun d'intersection des trois axes était fixe, le corps demeurerait en repos; car, art. 138, on aurait, d'une part,

$$Q'x' + Q''x'' + \&c. = 0; \quad Q'y' + Q''y'' + \&c. = 0;$$

ce qui énonce que la résultante des forces perpendiculaires au plan xy passe part le point fixe.

Et de l'autre,

$$R'(y' \cos. \alpha' - x' \sin. \alpha') + \&c. = 0;$$

ce qui énonce que la résultante des forces R', R'', &c. passe par le même point.

C'est d'après ces propriétés qu'on a désigné les trois équations dont il s'agit, par le nom d'équations de l'*équilibre de rotation.*

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			94. Un corps étant assujetti à tourner autour d'un axe fixe, trouver les conditions de l'équilibre.
			95. Déterminer les conditions particulières qu'exprime chacune des trois dernières équations de l'équilibre d'un corps de forme invariable données art. 135.
			96. Un système ou corps de forme invariable étant assujetti à tourner autour d'un point fixe, trouver les conditions de son équilibre.
	34. De l'équilibre de rotation.		

143. LORSQU'IL y a un axe fixe dans le système (on suppose que c'est l'axe des x), on peut faire équilibre à toutes les forces appliquées à ce système, avec une force P, en remplissant les conditions énoncées dans l'équation

$$Pp \sin . \alpha = P_{,} (y_{,} \cos . \gamma_{,} - z_{,} \cos . \beta') + P_{,,} (y_{,,} \cos . \gamma_{,,} - z_{,,} \cos . \beta_{,,}) + \&c. ;$$

et ces conditions peuvent être remplies en se donnant arbitrairement deux des trois quantités P, p et α. Cependant la détermination de α est sujette à une limitation, en ce que le produit Pp doit être pris tel qu'on ait sin. $\alpha < 1$: en général, on peut supposer α égal à un angle droit ; ce qui épargne la force perdue P cos. α, dont le seul effet est d'agir sur l'axe, à moins que quelque circonstance n'oblige de faire autrement.

144. MAIS chacune des valeurs de P, dont le nombre est infini, qui est propre à établir l'équilibre, répond à une pression différente de l'axe ; et lorsque cet équilibre existe, l'axe, supposé inflexible et arrêté à deux points fixes, éprouve, à ces points, de la part des composantes dirigées dans des plans perpendiculaires à sa longueur, la même pression que si ces composantes étaient chacune, immédiatement et parallèlement à sa direction, appliquées à l'axe au point où cet axe rencontre le plan normal qui renferme la direction de la composante.

Ce théorème se déduit aisément de l'équation de l'art. 140

$$Rr = R' (y' \cos . \alpha' - x' \cos . \beta') + \&c.,$$

en appliquant à l'axe des x, ce que cette équation énonce de l'axe des z.

145. D'APRÈS cela, un corps assujetti à tourner autour d'un axe inflexible (on suppose que c'est celui des x), retenu à deux points fixes, étant sollicité par des puissances de quantités et directions quelconques, en équilibre, il est aisé de déterminer les pressions que supportent les deux points fixes. Si on suppose que l'un de ces points soit à l'origine des coordonnées, et l'autre à une distance a de l'origine, la décomposition des puissances fournit,

1.° Les composantes $P_{,} \cos \alpha_{,}$; $P_{,,} \cos . \alpha_{,,}$, &c., qui produisent, dans le sens de la direction de l'axe, un effort égal à leur somme.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
P = la puissance qui doit établir l'équilibre. p = sa plus courte distance à l'axe des x. α = l'angle que fait sa direction avec l'axe des x.		61. Un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe, étant sollicité par des puissances quelconques qui ne sont pas en équilibre, il y a une infinité de manières d'établir l'équilibre au moyen d'une seule puissance.	97. Un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe, étant sollicité par des forces qui ne se font pas équilibre, trouver une force qui, appliquée à ce corps, établisse l'équilibre.
		62. Un corps étant assujetti à tourner autour d'un axe inflexible retenu à deux points fixes; des puissances dirigées dans des plans perpendiculaires à cet axe, font, dans le cas de l'équilibre, supporter à ces deux points fixes les mêmes pressions que si chacune d'elles était immédiatement et parallélement à sa direction, appliquée à l'axe au point où cet axe coupe le plan normal dans lequel se trouve la direction de la puissance.	
$P_{,}$, $P_{,,}$, &c. sont des puissances appliquées au système. $\alpha_{,}$; $\alpha_{,,}$, &c.; $\beta_{,}$, $\beta_{,,}$, &c.; $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, &c., sont les angles formés par leurs directions et par des parallèles aux axes des x, y et z, passant par leurs points d'application.			98. Un corps assujetti à tourner autour d'un axe inflexible, lequel axe est retenu à deux points fixes, étant sollicité par des puissances de quantités et directions quelconques qui se font équilibre, trouver les efforts qui s'exercent dans le sens de l'axe, et ceux que

2.° Les mêmes composantes produisent, perpendiculairement à l'axe, des efforts ; savoir,

à l'origine . . . . $\frac{\rho_{\prime}}{a} P_{\prime} \cos. \alpha_{\prime}$; $\frac{\rho_{\prime\prime}}{a} P_{\prime\prime} \cos. \alpha_{\prime\prime}$; &c.

à une distance a de l'origine . . . $\frac{-\rho_{\prime}}{a} P_{\prime} \cos. \alpha_{\prime}$; $\frac{-\rho_{\prime\prime}}{a} P_{\prime\prime} \cos. \alpha_{\prime\prime}$; &c.

dans des directions qui font avec le plan xy, des angles qui ont pour tangentes . . . . $\frac{z_{\prime}}{y_{\prime}}$; $\frac{z_{\prime\prime}}{y_{\prime\prime}}$, &c.

3.° Les composantes P sin. α produisent des efforts perpendiculaires à l'axe ; savoir,

à l'origine . . . . $\frac{a - x_{\prime}}{a} P_{\prime}$ sin. $\alpha_{\prime}$; $\frac{a - x_{\prime\prime}}{a} P_{\prime\prime}$ sin. $\alpha_{\prime\prime}$; &c.

à une distance a de l'origine . . . $\frac{x_{\prime}}{a} P_{\prime}$ sin. $\alpha_{\prime}$; $\frac{x_{\prime\prime}}{a} P_{\prime\prime}$ sin. $\alpha_{\prime\prime}$; &c.

dans des directions qui font avec le plan xy, des angles qui ont pour tangentes . . . . $\frac{\cos. \gamma_{\prime}}{\cos. \beta_{\prime}}$; $\frac{\cos. \gamma_{\prime\prime}}{\cos. \beta_{\prime\prime}}$; &c.

146. Le système n'ayant qu'un seul point fixe, qui est supposé à l'origine des xyz, et étant sollicité par des puissances qui ne se font pas équilibre, on pourra d'abord établir l'équilibre au moyen de trois puissances ; savoir :

1.° Une puissance R agissant dans le plan xy, à une distance r de l'axe des z, et parallélement à l'axe des x, de manière qu'on ait

$$Rr = P_{\prime} (y_{\prime} \cos. \alpha_{\prime} - x_{\prime} \cos. \beta_{\prime}) + \&c.;$$

2.° Une puissance Q agissant dans le plan xz, à une distance q de l'axe des y, parallélement à l'axe des x, et satisfaisant à l'équation

$$Qq = P_{\prime} (x_{\prime} \cos. \gamma_{\prime} - z_{\prime} \cos. \alpha_{\prime}) + \&c.;$$

3.° Une puissance P agissant dans le plan yz, à une distance p de l'axe des x, parallélement à l'axe des y, et l'équation suivante ayant lieu :

$$Pp = P_{\prime} (y_{\prime} \cos. \gamma_{\prime} - z_{\prime} \cos. \beta_{\prime}) + \&c. \, *,$$

chacune des puissances R, Q, P est susceptible d'une infinité de valeurs, en donnant, respectivement, aux distances p, q, r les valeurs

* Il faut observer que chacune des puissances P, Q et R étant dirigée dans le plan de deux axes, n'a un moment que par rapport au troisième axe.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$p_{\prime}$, $p_{\prime\prime}$, &c., sont les perpendiculaires menées des points d'applications des puissances, sur l'axe des x. $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$; $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime}$, &c. sont les coordonnées des points d'applications. a est la distance entre les deux points (dont l'un est à l'origine) auxquels l'axe des x est retenu fixement.		63. Un corps assujetti à tourner autour d'un point fixe, étant sollicité par des puissances de quantités et directions quelconques qui ne se font pas équilibre, il y a une infinité de manières de contre-balancer l'action de ces puissances par une force unique.	supportent perpendiculairement à l'axe deux points fixes quelconques, auxquels cet axe serait retenu. 99. Un corps assujetti à tourner autour d'un point fixe, étant sollicité par des puissances de quantités et directions quelconques qui ne se font pas équilibre, trouver une puissance unique qui puisse contre-balancer toutes celles appliquées au système.

convenables. Mais la condition à laquelle il est le plus important de satisfaire, est que P, Q et R puissent se composer en une seule puissance, qui seule empêchera le système de tourner autour du point fixe. Pour cela, il faut que la résultante des deux puissances parallèles Q et R se trouve à la hauteur p au-dessus du plan xy, pour pouvoir rencontrer la puissance P; ce qui donne l'équation de condition

$$(Q + R)p = Qq$$

ou $$(Q + R)p = P_{,}(x_{,} \cos.\gamma_{,} - z_{,} \cos.\alpha_{,}) + \&c.$$

Le second membre de cette dernière équation est tout connu, et on peut y satisfaire d'une infinité de manières, en se donnant arbitrairement deux des trois quantités Q, R et p, et lorsque ces trois quantités seront déterminées, on calculera q, r et P par les équations ci-dessus.

Composant la résultante de Q et R avec la puissance P, on aura, pour la valeur de la puissance unique qui contre-balance toutes celles appliquées au système, $\sqrt{[(Q + R)^2 + P^2]}$.

Sa direction parallèle au plan xy, à une hauteur p au-dessus de ce plan, rencontrera celui des yz à une distance $\frac{Rr}{Q + R}$ de l'axe des z, et fera avec l'axe des x (ou une parallèle à cet axe) un angle ayant pour tangente $\frac{P}{Q + R}$.

La position du plan xy étant arbitraire, le parallélisme à ce plan ne limite en aucune manière la question.

147. Les valeurs ou les directions différentes qu'on peut donner à la puissance unique dans le cas de l'article précédent, comportent chacune une pression différente du point fixe, et, lorsque l'équilibre est établi, cette pression est en général $K = \sqrt{\{(X + N)^2 + (Y + P)^2 + Z^2\}}$,

Cosinus des angles formés par la direction de K et par l'axe des ....
$$\begin{cases} x \ldots \cos.\alpha = \frac{X + N}{K} \\ y \ldots \cos.\beta = \frac{Y + P}{K} \\ z \ldots \cos.\gamma = \frac{Z}{K}. \end{cases}$$

148. On voit par tout ce qui précède, combien les *momens* des forces, ou leurs produits par les perpendiculaires menées d'un point ou

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$N = Q + R$. K = la pression du point d'appui. X, Y et Z, sont les composantes parallèles aux axes des x, y et z, des puissances qui agissaient sur le système avant qu'on établît l'équilibre, au moyen des nouvelles forces P, Q et R.			100. Un corps assujetti à tourner autour d'un point fixe, étant sollicité par des puissances de quantités et directions quelconques qui se font équilibre, trouver, en quantité et en direction, la pression qui s'exerce au point fixe.

d'une ligne sous leurs directions, jouent un grand rôle dans les questions d'équilibre; et leur usage dans les questions de mouvement, n'est pas moins important. J'ai donné les formules nécessaires pour avoir les trois sommes des momens par rapport aux trois axes coordonnés, lorsqu'on connaît les angles que ces axes forment avec les directions des forces. Or, on déduit, de ces trois sommes, celle des momens par rapport à un axe de direction quelconque rencontrant les trois autres à leur point commun d'intersection, par une formule d'une simplicité et d'une élégance telle qu'on peut la regarder comme une des plus belles de la mécanique; voici cette formule :

$$M = P \cos.\alpha + Q \cos.\beta + R \cos.\gamma \ *.$$

Parmi tous les axes qui passent par l'intersection commune des trois axes fixes, il y en a un pour lequel cette somme des momens est un *maximum*, et dont la position se détermine par les équations

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{R}{\sqrt{(P^2 + Q^2)}}; \ \text{tang.}\,\eta = \frac{Q}{P},$$

et qui a pour valeur $M = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}$.

Ce résultat ne dépendant nullement des positions absolues des axes qui se coupent à l'origine fixe, fournit les deux conséquences remarquables énoncées à la fin du théorème 65, dont la seconde conduit au procédé suivant, pour déterminer, par construction, la position de l'axe du plus grand moment. Après avoir, par la méthode de l'art. 139, réduit toutes les forces qui agissent sur le système, à deux, que je nommerai f' et f'', composez l'une quelconque de ces forces résultantes, f', par exemple, en deux autres, $f_{\prime\prime}$ et $f_{\prime}$, telles que $f_{\prime}$ soit appliquée à l'origine fixe et $f_{\prime\prime}$ à un point de la direction de f'', avec laquelle on la composera en une force unique F; faites passer un plan par l'origine fixe et par la direction de F, la perpendiculaire à ce plan, menée au point pris pour origine fixe, sera l'axe du plus grand moment.

149. Lorsque les puissances qui agissent sur le système, peuvent se

---

* Ce théorème a été donné par *Euler* dans le tome VII des nouveaux Actes de Saint-Pétersbourg : *Laplace*, de son côté, l'a déduit de ses belles recherches sur la position d'un plan qui reste toujours parallèle à lui-même, dans le mouvement d'un système de corps agissant les uns sur les autres. *Journal de l'École polytechnique, n.° 5.* J'en ai donné une démonstration élémentaire dans le n.° 9 du même journal.

NOTATION.

M = la somme des momens par rapport à un axe passant par l'origine fixe des coordonnées : cet axe fait avec les axes des x, y et z, des angles respectifs α, β et γ, avec le plan des xy un angle θ, et sa projection sur le plan xy fait un angle η avec l'axe des x.

P, Q et R sont respectivement les sommes des momens par rapport aux axes des x, y et z,

$\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)} = K$

$\sqrt{(P^2 + Q^2)} = k$.

DÉFINITIONS.

THÉORÈMES.

64.

Si une ligne, passant par l'origine des coordonnées, fait avec les axes des x, y et z, des angles respectifs α, β et γ, la somme des momens des forces par rapport à cet axe a pour valeur,

$$P \cos. \alpha + Q \cos. \beta + R \cos. \gamma.$$

65.

Cette somme est un *maximum*, lorsqu'on a

$$\left.\begin{aligned} \cos. \alpha &= \frac{k}{K} . R \\ \cos. \beta &= \frac{k}{K} . Q \\ \cos. \gamma &= \frac{1}{K} . R \end{aligned}\right\}$$

Ces angles donnent ceux de l'art. 148, et réciproquement,

et sa valeur est $= K$; d'où il suit, 1.° que, quelque position qu'on donne aux axes des x, y et z, tant que leur intersection commune sera au même point, la somme K^2 des carrés des sommes particulières des momens par rapport à chacun de ces axes sera invariable; 2.° que la somme des momens est nulle par rapport à toute ligne passant par l'origine fixe, et perpendiculaire à l'axe de plus grand moment.

PROBLÈMES.

101.

Trouver les équations de condition qui doivent avoir lieu pour que des puissances de quantités et directions quelcon-

réduire à une résultante unique, l'axe du plus grand moment est perpendiculaire au plan passant par l'origine fixe et par la direction de la résultante unique. Cette propriété inspire naturellement le desir de connaître les conditions qui doivent avoir lieu, pour que la résultante de plusieurs forces soit unique. Voici les trois équations qui renferment ces conditions; et je les aurais données, indépendamment de la considération dont je viens de parler, à cause du grand parti que j'en tire pour la théorie du *centre des forces* et du *centre d'inertie.*

$Y(Zx) = Z(Yx)\ldots$ qui énonce que la résultante Z de $P_{,} \cos. \gamma_{,}$, $P_{,,} \cos. \gamma_{,,}$, &c., et celle Y de $P_{,} \cos. \beta_{,}$, $P_{,,} \cos. \beta_{,,}$, &c., se coupent ou sont à la même distance du plan yz;

$X(Zy) = Z(Xy)\ldots$ qui énonce que la résultante Z de $P_{,} \cos. \gamma_{,}$, $P_{,,} \cos. \gamma_{,,}$, &c., et celle X de $P_{,} \cos. \alpha_{,}$, $P_{,,} \cos. \alpha_{,,}$, &c. se coupent ou sont à la même distance du plan xz;

$X(Yz) = Y(Xz)\ldots$ qui énonce que la résultante X de $P_{,} \cos. \alpha_{,}$, $P_{,,} \cos. \alpha_{,,}$, &c., et celle Y de $P_{,} \cos. \beta_{,}$, $P_{,,} \cos. \beta_{,,}$, &c., se coupent ou sont à la même distance du plan xy.

Lorsqu'une ou deux seulement de ces équations ont lieu, il y a des intersections séparées des lignes de direction de X, Y et Z prises deux à deux; et lorsque les trois équations ont lieu, les trois directions coïncident en un seul point.

150. DANS ce dernier cas, on a, pour déterminer la résultante P,

$$\left.\begin{aligned} P &= \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} \\ \cos. \alpha &= \frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}} \\ \cos. \beta &= \frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}} \\ \cos. \gamma &= \frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}} \end{aligned}\right\} \text{Ces équations sont les mêmes qu'on obtiendrait pour l'équilibre d'un point.}$$

$$x = \frac{P_{,} x_{,} \cos. \beta_{,} + P_{,,} x_{,,} \cos. \beta_{,,} + \&c.}{P_{,} \cos. \beta_{,} + P_{,,} \cos. \beta_{,,} + \&c.} = \frac{P_{,} x_{,} \cos. \gamma_{,} + P_{,,} x_{,,} \cos. \gamma_{,,} + \&c.}{P_{,} \cos. \gamma_{,} + P_{,,} \cos. \gamma_{,,} + \&c.}$$

$$y = \frac{P_{,} y_{,} \cos. \alpha_{,} + P_{,,} y_{,,} \cos. \alpha_{,,} + \&c.}{P_{,} \cos. \alpha_{,} + P_{,,} \cos. \alpha_{,,} + \&c.} = \frac{P_{,} y_{,} \cos. \gamma_{,} + P_{,,} y_{,,} \cos. \gamma_{,,} + \&c.}{P_{,} \cos. \gamma_{,} + P_{,,} \cos. \gamma_{,,} + \&c.}$$

$$z = \frac{P_{,} z_{,} \cos. \alpha_{,} + P_{,,} z_{,} \cos. \alpha_{,,} + \&c.}{P_{,} \cos. \alpha_{,} + P_{,,} \cos. \alpha_{,,} + \&c.} = \frac{P_{,} z_{,} \cos. \beta_{,} + P_{,,} z_{,} \cos. \beta_{,,} + \&c.}{P_{,} \cos. \beta_{,} + P_{,,} \cos. \beta_{,,} + \&c.}.$$

L'identité des doubles valeurs de chaque coordonnée, est précisément ce qu'énoncent les équations de condition de l'article précédent.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
X, Y et Z sont les composantes parallèles aux axes des x, y et z. (Xy) est une notation abrégée de la quantité $P_{,}y_{,}\cos.\alpha_{,} + P_{,,}y_{,,}\cos.\alpha_{,,} +$ &c. On a de la même manière, $(Xz) = P_{,}z_{,}\cos.\alpha_{,} +$ &c. $(Yx) = P_{,}x_{,}\cos.\beta_{,} +$ &c. $(Yz) = P_{,}z_{,}\cos.\beta_{,} +$ &c. $(Zx) = P_{,}x_{,}\cos.\gamma_{,} +$ &c. $(Zy) = P_{,}y_{,}\cos.\gamma_{,} +$ &c.			ques qui agissent sur un corps de forme invariable, aient une résultante unique.
x, y et z sont les coordonnées du point commun d'intersection de X, Y et Z.			102. Déterminer la quantité et la direction de la résultante de plusieurs puissances qui agissent sur un corps, lorsque cette résultante est unique, ainsi que les coordonnées du point commun de rencontre des puissances X, Y et Z, qui représente, respectivement, les résultantes des trois groupes de composantes parallèles aux x, aux y et aux z.
		66. Les équations de condition qui énoncent que la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps de	

151. Lorsque les puissances qui agissent sur le corps ont toutes leurs directions parallèles, les équations précédentes deviennent

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{P_{,} x_{,} + P_{,,} x_{,,} + \&c.}{P_{,} + P_{,,} + \&c.} \\ y &= \frac{P_{,} y_{,} + P_{,,} y_{,,} + \&c.}{P_{,} + P_{,,} + \&c.} \\ z &= \frac{P_{,} z_{,} + P_{,,} z_{,,} + \&c.}{P_{,} + P_{,,} + \&c.} \end{aligned}\right\}$$

$P = P' + P'' + \&c.$ α, β et γ ont les valeurs communes aux directions de toutes les puissances du système.

152. On prouve par des considérations géométriques, que lorsque ces équations ont lieu par rapport à trois axes coordonnés de position déterminée, des équations pareilles ont lieu par rapport à trois autres axes coordonnés quelconques; que les premières redonnent les dernières, et réciproquement. Cette propriété peut se déduire du résultat où l'on est arrivé art. 148 : elle peut aussi conduire à ce même résultat; mais le raisonnement de l'article cité, est plus direct et plus simple que celui qu'il faudrait faire sur les équations de l'article 151.

153. Mais une propriété remarquable et utile des équations de l'article 151, est que les valeurs de x, y et z ne dépendent nullement de la direction commune des puissances, ni même de leurs valeurs absolues, et que le point auquel ces coordonnées se rapportent, aura toujours la même position dans le corps tant que les puissances conserveront entre elles le même rapport (l'une quelconque d'entre elles pouvant avoir une valeur arbitraire), et que leurs directions seront parallèles à une même ligne droite dont la position est tout-à-fait arbitraire.

154. Cette propriété importante a fait donner au point fixe dont il s'agit, le nom de *centre des forces.*

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		forme invariable, est unique, ont toujours lieu dans le cas des forces à directions parallèles.	
$P_{,}$, $P_{,,}$ &c. $x_{,}$ $x_{,,}$ &c. ont la même signification qu'à l'art. 145.		67. Lorsque les équations $P = P_{,} + P_{,,} + \&c.$ $x = \frac{P_{,} x_{,} + P_{,,} x_{,,} + \&c.}{P}$ $y = \frac{P_{,} y_{,} + P_{,,} y_{,,} + \&c.}{P}$ $z = \frac{P_{,} z_{,} + P_{,,} z_{,,} + \&c.}{P}$ ont lieu par rapport à trois axes coordonnés de position déterminée, des équations parallèles ont lieu par rapport à trois autres axes coordonnés quelconques, les premières redonnent les dernières, et réciproquement.	103. Appliquer la solution du problème précédent au cas où toutes les puissances ont des directions parallèles.
	35. Du centre des forces.	68. Lorsque des puissances à directions parallèles agissent sur un corps de forme invariable, si on change d'une manière quelconque la direction commune des puissances (qui sont néanmoins toujours appliquées aux mêmes points du système) et même leurs valeurs absolues, pourvu qu'elles conservent les mêmes rapports entre elles, il y	

155. Il est un cas de la théorie exposée dans les trois articles précédens, qui conduit à un théorème fondamental dont on fait un usage continuel dans la mécanique ; c'est celui où l'on suppose que les puissances parallèles sont proportionnelles aux masses des points matériels sur lesquels elles agissent : dans ce cas, observant que $P' = g'm'$; $P'' = g''m''$, &c., on a, à cause de $P' : P'' : P''' :$ &c. $:: m' : m'' : m''' :$ &c.,

$$g' = g'' = g''' = \&c.$$

$$x = \frac{m'x' + m''x'' + \&c.}{m' + m'' + \&c.}$$

$$y = \frac{m'y' + m''y'' + \&c.}{m' + m'' + \&c.}$$

$$z = \frac{m'z' + m''z'' + \&c.}{m' + m'' + \&c.}.$$

156. On voit qu'il y a un point sur la direction de la résultante, dont la position ne dépend en aucune manière ni de la direction commune des puissances, ni de ces puissances elles-mêmes, et est uniquement donnée par le rapport des masses et les positions respectives des points matériels qui composent le système ou le corps.

157. Le point fixe dont on vient de parler, s'appelle *centre d'inertie; Euler* a substitué ce nom à celui de *centre de gravité*, parce que la position de ce point ne dépendant nullement de puissances qu'on peut supposer agir sur le corps, son nom ne doit en rappeler aucune.

158. Lorsque le corps est homogène, le centre d'inertie prend aussi le nom de *centre de figure*.

159. Lorsque les coordonnées des différens points d'un système sont rapportées à des axes qui passent par le centre d'inertie de ce même système, les coordonnées du centre d'inertie sont nulles, et on a

$$m'x' + m''x'' + \&c. = 0$$

$$m'y' + m''y'' + \&c. = 0$$

$$m'z' + m''z'' + \&c. = 0.$$

160. Il est aisé maintenant de trouver des formules pour déterminer

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
g', g'', &c. sont les forces accélératrices; m', m'', &c. sont les masses des points matériels du système, sollicités par les puissances P', P'', &c.		aura un point fixe dans le corps par lequel la résultante passera toujours, quels que soient les changemens qu'on fasse, en s'astreignant aux conditions exigées.	104. Trouver le point fixe par où passe la résultante de plusieurs puissances parallèles qui agissent sur un corps de forme invariable, lorsque ces puissances sont proportionnelles aux masses des points matériels auxquels elles sont respectivement appliquées.
	36. Du centre d'inertie.	69. Lorsqu'un système ou corps de forme invariable est sollicité par des puissances à directions parallèles et proportionnelles aux masses des points matériels sur lesquels elles agissent respectivement, il y a un point sur la direction de la résultante dont la position est fixe dans le corps, et ne dépend que de la figure de ce corps et des rapports des masses des points matériels qui le composent.	
	37. Du centre de figure.	70. Si les plans coordonnés auxquels on rapporte les positions de tous les points d'un système, passent par le centre d'inertie de ce système, on a $m'x' + m''x'' + \&c. = 0$ $m'y' + m'y'' + \&c. = 0$ $m'z' + m'z'' + \&c. = 0$	

la position du centre d'inertie des corps continus. On a en général,

Distances du centre d'inertie d'un corps continu aux plans....
$$\left\{\begin{array}{l} \text{des } yz \ldots \dfrac{\int x\, dM}{M} \\ \text{des } xz \ldots \dfrac{\int y\, dM}{M} \\ \text{des } xy \ldots \dfrac{\int z\, dM}{M}. \end{array}\right.$$

161. Les théorèmes 71, 72 et 73 facilitent, dans beaucoup de circonstances, l'emploi de ces formules.

162. Les formules pour trouver la position du centre d'inertie d'une courbe plane, sont

Distance à l'axe...
$$\left\{\begin{array}{l} \text{des } y \ldots \dfrac{\int x\, ds + A}{s} \\ \text{des } x \ldots \dfrac{\int y\, ds + B}{s} \end{array}\right\}$$
A et B sont les constantes qui complètent les intégrales.

L'application de ces formules à un arc de cercle donne un résultat extrêmement simple ; la distance du centre du cercle au centre d'inertie cherché, mesurée sur le rayon perpendiculaire à la corde de l'arc, est égale à $\dfrac{\text{rayon} \times \text{corde de l'arc}}{\text{longueur de l'arc}}$.

163. La position du centre d'inertie d'une surface plane, terminée par une courbe quelconque, est donnée en général par les formules,

Distance à l'axe...
$$\left\{\begin{array}{l} \text{des } y \ldots \dfrac{\int yx\, dx + A}{\int y\, dx + B}. \\ \text{des } x \ldots \dfrac{\int y^2\, dx + A'}{2\int y\, dx + B'}, \end{array}\right.$$

Le trapèze, le triangle et le secteur de cercle offrent les applications les plus simples de ces formules. Si l'on trace un rayon qui partage le secteur en deux parties égales, et qu'à partir du centre on prenne sur ce rayon une longueur $= \dfrac{\frac{1}{2}\,\text{corde} \times \frac{2}{3}\,\text{rayon}}{\frac{1}{2}\,\text{arc}}$, on aura le centre d'inertie du secteur.

La distance comptée de la même origine, au centre d'inertie du segment, $= \dfrac{\frac{1}{12}\,(\text{corde})^3}{\text{segment}}$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$M =$ la masse totale des corps.			105. Trouver les formules générales qui servent à déterminer la position du centre d'inertie d'un corps.
$s =$ la longueur de l'arc de courbe.		71. Lorsqu'on a plusieurs corps de grandeur finie dont on veut trouver le centre d'inertie commun, et qu'on connaît la position de celui de chaque corps en particulier, on peut, dans cette recherche, considérer tous ces corps comme concentrés chacun en un seul point placé à son centre d'inertie.	106. Trouver les formules pour la détermination de la position du centre d'inertie d'une courbe plane.
		72. Si les centres d'inertie de plusieurs corps sont sur une même ligne droite, le centre d'inertie de tout leur système sera sur la même ligne.	107. Appliquer ces formules à la recherche de la position du centre d'inertie d'un arc de cercle.
		73. Lorsqu'un corps homogène est symétrique par rapport à un plan ou à un axe, son centre d'inertie est dans ce plan ou sur cet axe.	108. Trouver les formules pour la détermination de la position du centre d'inertie d'une surface plane terminée par une courbe quelconque.
			109. Appliquer les formules précédentes Au trapèze, Au triangle, Au segment de cercle, Au secteur de cercle.

164. Le centre d'inertie d'une surface de révolution, est sur l'axe de révolution à une distance de l'origine de cet axe, qu'on calcule par la formule

$$\frac{\int xy\,ds + A}{\int y\,ds + B}.$$

On trouve aisément les centres d'inertie des surfaces du cône tronqué, du cône et du cylindre, qui sont connus lorsqu'on a les positions des centres d'inertie des aires terminées par les lignes génératrices.

Voyez, pour les portions de surface sphérique, les théorèmes 75 et 76.

165. Les solides conoïdes, pyramidaux, symétriques, &c. par rapport à un axe, ont leur centre d'inertie placé sur cet axe à une distance de l'origine des x, égale à

$$\frac{\int (Kx\,dx) + C}{\int K\,dx + D} \quad \left\{ \begin{array}{l} C \text{ et } D \text{ sont les constantes qui} \\ \text{doivent compléter l'intégrale.} \end{array} \right.$$

Cette formule convient au cas où les apothèmes sont des courbes quelconques; mais lorsque les apothèmes sont des lignes droites, ce qui donne les cônes, pyramides, &c. ordinaires, la formule devient

$$\frac{3\,A\,x^4 + C}{4\,A\,x^3 + D}.$$

Lorsque l'origine est prise au sommet, on a $C = 0$ et $D = 0$, et l'expression devient $\frac{3}{4}\,x$; mais lorsque le solide est tronqué, si l'on appelle a la distance du sommet à l'origine de x, la formule devien

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{x^4 - a^4}{x^3 - a^3}.$$

166. Les solides de révolution qui offrent un cas particulier des précédens, ont leur centre d'inertie placé sur l'axe de révolution, à une distance de l'origine de cet axe égale à

$$\frac{\int xy^2\,dx + C}{\int y^2\,dx + D}.$$

On trouve, en appliquant cette formule à une calotte sphérique et à

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		74. Les centres d'inertie des surfaces du cône tronqué, du cône et du cylindre droits, sont à la même distance de l'origine des x (l'axe des x est celui de révolution) que les centres d'inertie du trapèze, du triangle et du parallélogramme rectangle, générateurs de ces surfaces.	110. Trouver la position du centre d'inertie d'une surface de révolution.
		75. Le centre d'inertie d'une portion de la surface d'une sphère, renfermé entre deux plans parallèles, est sur le milieu de la ligne droite qui joint les centres des deux cercles entre lesquels cette portion de surface est comprise.	111. Trouver la position du centre d'inertie d'un solide conoïde, pyramidal, &c., dont l'apothème est une courbe quelconque.
K = une section quelconque parallèle à la base.			112. Appliquer la solution précédente aux solides coniques et pyramidaux à apothèmes rectilignes.
A = la surface de la base.		76. Le centre d'inertie de la surface d'une calotte sphérique est au milieu de la flèche de cette calotte.	
a = la distance du sommet à l'origine des x.			113. Trouver la position du centre d'inertie d'un solide de révolution.

segment ellipsoïdal, dont la base est perpendiculaire
à l'axe . . . . $\frac{8a - 3x}{12a - 4x} . x$
pour le secteur sphérique . . . . $\frac{1}{8}(2a + 3x)$
pour la demi-sphère . . . . $\frac{5}{8} a$
pour le segment parabolique . . . . . $\frac{2}{3} x$
pour le solide engendré par la révolution d'une hyperbole . . . . $\frac{8a + 3x}{12a + 4x} . x$

Toutes ces distances sont comptées à partir du sommet de la calotte sphérique, parabolique ou hyperbolique.

Cette dernière distance est toujours moyenne entre les deux tiers et les trois quarts de l'abscisse.

167. On déduit de la théorie des centres d'inertie, des théorèmes extrêmement curieux, et qui sont d'un grand usage pour la mesure des surfaces et des solidités. *Voyez* les théorèmes 77, 78 et 79, en observant que par la somme des surfaces et des solides engendrés, on entend la différence entre ceux dont les lignes ou les surfaces génératrices sont de part et d'autre de l'axe de révolution.

On nomme méthode *centrobarique*, cette manière de mesurer les surfaces et les solidités.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
a = rayon ou demi-axe.			114. Appliquer la formule précédente aux cas où le solide est un secteur sphérique, un segment sphérique, un segment ellipsoïdal, un segment parabolique, un segment hyperbolique.
	38. De la méthode centrobarique.	77. La mesure d'une surface ou d'un solide de révolution, s'obtient en multipliant la courbe ou la surface génératrice par l'arc de cercle que son centre d'inertie a décrit autour de l'axe de révolution. 78. La somme des surfaces ou des solides de révolution engendrés par plusieurs courbes ou surfaces génératrices situées dans un même plan, et tournant autour d'un axe commun, est égale à la somme des courbes ou surfaces génératrices multipliée par l'arc de cercle qu'a décrit leur centre d'inertie commun. 79. Une surface plane qui se meut perpendiculairement à une courbe à simple ou double courbure, de manière que son centre	

168. Les solutions de toutes les questions que nous avons traitées jusqu'à présent, et de toutes celles qu'on peut proposer sur l'équilibre d'un système de forme invariable, ne sont que des conséquences de la formule générale suivante, donnée par le principe des vîtesses virtuelles :

$$P_{,}dp_{,} + P_{,,}dp_{,,} + P_{,,,}dp_{,,,} + \&c. = 0.$$

On peut démontrer cette formule ou en partant des six équations d'équilibre données art. 135, ou en partant du théorème de la composition de trois forces appliquées à un même point matériel. Dans ce dernier cas, on sait comment les six équations d'équilibre se déduisent de cette formule.

169. Le polygone et la courbe funiculaire ont fourni les premiers exemples de l'application des principes de la statique à des systèmes de forme variable. Les côtés du polygone sont supposés inextensibles, parfaitement flexibles et toujours tendus. Ces conditions fournissent l'équation suivante, qui convient à l'espèce de système dont il s'agit :

$$d[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2] = 0,$$

et qui exprime que les deux extrémités d'un même côté (qui peut être d'une longueur finie ou infiniment petite) sont à une distance invariable l'une de l'autre.

170. Ces préliminaires posés, on démontre aisément le théorème 81 ; et en combinant les tensions des cordons avec les puissances qui agissent à leurs extrémités, on obtient le théorème 82.

171. Lorsqu'on a démontré le principe des vîtesses virtuelles dans le polygone funiculaire, en combinant ce principe avec les équations

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		d'inertie soit toujours sur cette courbe, engendre un solide égal à la surface génératrice multipliée par la longueur de la ligne que le centre d'inertie a parcourue.	
$P_{,}$, $P_{,,}$, &c. sont les puissances appliquées au système. $p_{,}$, $p_{,,}$, &c. sont des longueurs prises sur les directions de ces puissances et se terminent à leurs points d'application.		80. Le principe des vîtesses virtuelles a lieu dans l'équilibre d'un système de points matériels dont les distances respectives sont invariables.	
	39. Du polygone et de la courbe funiculaire.		115. Trouver l'équation qui exprime que la longueur d'un côté du poligone ou celle d'un élément de la courbe funiculaire est invariable.
x', x; y', y; z', z sont les coordonnées des deux points extrêmes d'un côté quelconque du polygone funiculaire.			
		81. Un point quelconque d'un polygone funiculaire en équilibre est sollicité de la même manière que si toutes les puissances appliquées aux angles de ce polygone agissaient	116. Déduire de l'équation donnée par le principe

de condition qui expriment l'inextensibilité de chaque côté, art. 169, on obtient, d'une manière très-simple et très-élégante, toutes les équations qui donnent la solution des différens cas que la question comporte.

D'abord, l'équation du principe des vîtesses virtuelles se met sous la forme

$$X' dx' + X'' dx'' + \&c. + Y' dy' + Y'' dy'' + \&c. + Z' dz' + Z'' dz'' + \&c. = 0.$$

On a ensuite les équations de condition

$$df = 0;\ dg = 0;\ dh = 0;\ \&c.;$$

f, g, &c. s'expriment en fonctions des coordonnées de leurs points extrêmes; savoir;

$$f^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$$
$$g^2 = (x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2$$
$$\&c. \qquad \&c.,$$

d'où on déduit les valeurs de df, dg, &c.; et employant la méthode de *Lagrange*, on parvient aux équations :

	TERMES DONNÉS PAR LES COEFFICIENS de dx', dx'', &c.
Lignes des accens N.° 1.......	$X' - \frac{\lambda\,(x'' - x')}{f} = 0$
Lignes des accens N.° 2......	$X'' + \frac{\lambda\,(x'' - x')}{f} - \frac{\mu\,(x''' - x'')}{g} = 0$
....	&c. ....
....	....
Lignes des accens N.° $(n-1)$.	$X^{(n-1)} + \frac{\tau\,(x^{(n-1)} - x^{(n-2)})}{t} - \frac{\psi\,(x^{(n)} - x^{(n-1)})}{v} = 0$
Lignes des accens N.° (n).....	$X^{(n)} + \frac{\psi\,(x^{(n)} - x^{(n-1)})}{v} = 0$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
X', X'', &c.; Y', Y'', &c.; Z', Z'', &c. sont les puissances parallèles aux x, y et z, appliquées aux sommets des angles du polygone qui ont respectivement x', x'', &c.; y', y'', &c.; z', z'', &c. pour coordonnées. f, g, h, &c. sont les longueurs des côtés correspondans du polygone funiculaire. λ, ν, &c. sont des coefficiens indéterminés.		immédiatement sur le point dont il s'agit, parallélement à leurs directions respectives. 82. Le principe des vîtesses virtuelles a lieu dans l'équilibre d'un polygone funiculaire, et en général dans tout polygone où la distance entre les deux points qui se trouvent aux extrémités d'un même côté est invariable, les angles formés par les côtés pouvant changer.	des vîtesses virtuelles, toutes les équations qui se rapportent au problème du polygone funiculaire, les côtés étant ou non dans le même plan.

TERMES DONNÉS PAR LES COEFFICIENS de dy', dy'', &c.	TERMES DONNÉS PAR LES COEFFICIENS de dz', dz'', &c.
$Y' - \frac{\lambda(y''-y')}{f} = 0$	$Z' - \frac{\lambda(z''-z')}{f} = 0$
$Y'' + \frac{\lambda(y''-y')}{f} - \frac{\mu(y'''-y'')}{g} = 0$	$Z'' + \frac{\lambda(z''-z')}{f} - \frac{\mu(z'''-z'')}{g} = 0$
....	....
....	....
$Y^{(n-1)} + \frac{\tau(y^{(n-1)}-y^{(n-2)})}{t} - \frac{\psi(y^{(n)}-y^{(n-1)})}{v} = 0$	$Z^{(n-1)} + \frac{\tau(z^{(n-1)}-z^{(n-2)})}{t} - \frac{\psi(z^{(n)}-z^{(n-1)})}{v} = 0$
$Y^{(n)} + \frac{\psi(y^{(n)}-y^{(n-1)})}{v} = 0$	$Z^{(n)} + \frac{\psi(z^{(n)}-z^{(n-1)})}{v} = 0$

Ce tableau donne autant de lignes horizontales qu'il y a d'angles dans le système ; et par son moyen, on en forme un second qui ne donne que la peine de l'écrire, 1.° en prenant la somme des équations de chaque colonne ; 2.° en prenant cette somme seulement à compter de la ligne des accens n.° 2 ; 3.° en prenant la somme à compter de la ligne des accens n.° 3 ; et ainsi de suite ; ce qui donne

1	2
$X' + X'' + \&c. = 0$	$Y' + Y'' + \&c. = 0$
$X'' + X''' + \&c. + \frac{\lambda\,(x'' - x')}{f} = 0$	$Y'' + Y''' + \&c. + \frac{\lambda\,(y'' - y')}{f} = 0$
....	....
....	....
$X^{(n-1)} + X^{(n)} + \frac{\tau\,(x^{(n-1)} - x^{(n-2)})}{t} = 0$	$Y^{(n-1)} + Y^{(n)} + \frac{\tau\,(y^{(n-1)} - y^{(n-2)})}{t} = 0$
$X^{(n)} + \frac{\psi\,(x^{(n)} - x^{(n-1)})}{v} = 0$	$Y^{(n)} + \frac{\psi\,(y^{(n)} - y^{(n-1)})}{v} = 0$

Chaque ligne horizontale, à compter de la seconde, ne contient qu'une des indéterminées λ, μ, &c., et on peut éliminer cette indéterminée, 1.° entre l'équation de la première colonne verticale et celle de la seconde ; 2.° entre celle de la première et celle de la troisième ; ce qui donnera

$$X' + X'' + X''' + \&c. = 0$$

$$Y' + Y'' + Y''' + \&c. = 0$$

$$Z' + Z'' + Z''' + \&c. = 0$$

$$(Y'' + Y''' + \&c.) - \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,(X'' + X''' + \&c.) = 0$$

....

....

$$Y^{(n-1)} + Y^{(n)} - \frac{y^{(n-1)} - y^{(n-2)}}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}\,(X^{(n-1)} + X^{(n)}) = 0$$

3

$$Z' + Z'' + \&c. = 0$$

$$Z'' + Z''' + \&c. + \frac{\lambda\,(z'' - z')}{f} = 0$$

....

....

$$Z^{(n-1)} + Z^{(n)} + \frac{\tau\,(z^{(n-1)} - z^{(n-2)})}{t} = 0$$

$$Z^{(n)} + \frac{\psi\,(z^{(n)} - z^{(n-1)})}{v} = 0$$

$$Y^{(n)} - \frac{y^{(n)} - y^{(n-1)}}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} X^{(n)} = 0$$

$$(Z'' + Z''' + \&c.) - \frac{z'' - z'}{x'' - x'} (X'' + X''' + \&c.) = 0$$

. . . .

. . . .

$$Z^{(n-1)} + Z^{(n)} - \frac{z^{(n-1)} - z^{(n-2)}}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}} (X^{(n-1)} + X^{(\ )}) = 0$$

$$Z^{(n)} - \frac{z^{(n)} - z^{(n-1)}}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} X^{(n)} = 0.$$

On déduit d'abord de ces équations, les valeurs des tangentes des angles que les côtés du polygone funiculaire font avec les axes coordonnés.

Ensuite, combinant ces valeurs avec celles de f, g, &c., et supposant que le point n.° 1 est donné de position, on trouve les coordonnées des points n.os 2, 3, &c.

172. Si un des points du système était fixe, le premier par exemple, on aurait $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = 0$; les équations $X' + X'' + \&c. = 0$, $Y' + Y'' + \&c. = 0$, $Z' + Z'' + \&c. = 0$ n'auront pas lieu. Si le premier et le dernier points étaient fixes, on aurait de plus $dx^{(n)} = 0$, $dy^{(n)} = 0$, $dz^{(n)} = 0$, et il faudrait introduire cette condition dans les équations d'équilibre.

173. Les termes λdf, μdg, &c., introduits dans l'équation des vîtesses virtuelles, peuvent être considérés comme les momens des forces qui agissent dans les directions des côtés f, g, &c.; en sorte que les indéterminées λ, μ, &c. expriment les tensions des cordons qui composent chaque côté du polygone; et ces tensions sont données immédiatement par les équations qui composent le second tableau de l'article précédent.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			117. En supposant que les quantités et les directions des puissances sont données, trouver, 1.° Les angles que chaque côté du polygone funiculaire fait avec les axes coordonnés; 2.° Les coordonnées des différens points du système.
			118. Introduire dans les équations d'équilibre du polygone funiculaire, la condition que le premier point, ou le dernier, ou tous les deux, sont fixes.
		83. Les termes introduits par les équations de condition dans la formule d'équilibre du polygone funiculaire, déduite du principe des vîtesses virtuelles, expriment les *momens* des tensions des cordons; et les indéterminées par lesquelles on a multiplié les équations, sont les valeurs des tensions.	119. Trouver les tensions de chaque côté du polygone funiculaire.

174. On peut, soit au moyen des équations données dans les articles précédens, soit en employant immédiatement les théorèmes élémentaires sur la décomposition des forces, trouver les équations qui donnent la relation entre les coordonnées du polygone funiculaire. Le problème n'offre pas plus de difficulté lorsque les côtés du polygone ne sont pas dans le même plan, que lorsqu'ils y sont, parce que la projection de ce polygone sur le plan xy, considérée comme un polygone funiculaire plan, aux angles duquel sont appliquées respectivement les forces X', Y' ; X'', Y'', &c., doit être en équilibre si le polygone projeté y est lui-même ; qu'il en est de même de la projection sur l'un des plans xz ou yz, et que les trois équations sont précisément de même forme, en sorte que l'une étant donnée, les autres le sont aussi.

Supposant donc tout simplement qu'on a un polygone funiculaire en équilibre, où tous les côtés et les directions de toutes les forces sont dans le même plan, on aura l'équation

$$P\left\{\sin.\alpha\,\frac{\Delta x}{\Delta s} + \cos.\alpha\,\frac{\Delta y}{\Delta s}\right\}\frac{\Delta s'}{r'} = P'\left\{\sin.\alpha'\,\frac{\Delta x''}{\Delta s''} - \cos.\alpha'\,\frac{\Delta y''}{\Delta s''}\right\}\frac{\Delta s}{r}.$$

Si on suppose que tous les côtés du polygone funiculaire sont égaux, ou que $\Delta s = \Delta s'$, l'équation précédente deviendra

$$Pr\{\Delta x \sin.\alpha - \Delta y \cos.\alpha\} = P'r'\{\Delta x'' \sin.\alpha' - \Delta y'' \cos.\alpha'\},$$

et passant du polygone à la courbe, on obtient, toutes réductions faites, l'équation

$$\frac{d[Pr(dx \sin.\alpha - dy \cos.\alpha)]}{ds} + P(dy \sin.\alpha + dx \cos.\alpha) = 0,$$

dans laquelle r est le rayon de courbure, et qui peut, si l'on veut, représenter une des équations de projection de la courbe funiculaire à double courbure.

175. Les puissances étant supposées agir perpendiculairement à la courbe, on a $\sin.\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos.\alpha = \frac{-dy}{ds}$; et l'équation précédente devient

$$d(pr) = 0,\ \text{ou}\ p = \frac{A}{r}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
Δs, $\Delta s'$ et $\Delta s''$ sont les longueurs des trois côtés consécutifs du polygone funiculaire ; l'origine de chacun de ces côtés étant à celle de ses extrémités qui est du côté de l'origine des x.		84. Les équations des projections du polygone et de la courbe funiculaire sur les plans des xy et des xz sont de même forme, en sorte que l'une étant donnée, l'autre l'est aussi.	
x et y sont les deux coordonnées du sommet d'un des angles du polygone, lequel sommet est l'origine du côté Δs de ce polygone.			120. Trouver les équations,
x'' et y'' sont les coordonnées de l'extrémité du côté $\Delta s'$ du polygone.			
P est la puissance appliquée à l'extrémité du côté Δs ou à l'origine du côté $\Delta s'$.			1.° Du polygone funiculaire à côtés inégaux ou à côtés égaux ;
P' est la puissance appliquée à l'extrémité du côté $\Delta s'$.			
α et α' sont les angles formés par les directions de P et P', et par l'axe des x.			2.° De la courbe funiculaire en supposant ds constant.
Si aux origines de Δs, $\Delta s'$ et $\Delta s''$, on mène des perpendiculaires respectivement sur chacun de ces côtés, la distance entre l'extrémité de Δs et l'intersection des deux premières perpendiculaires sera $= r$, et la distance entre l'extrémité de $\Delta s'$ et l'intersection des deux secondes perpendiculaires, sera $= r'$.		85. Dans le cas où les puissances sollicitantes agissent dans des directions normales à la courbe funiculaire, chacune de ces puissances est réciproquement proportion-	

176. Dans le cas de la pesanteur, tous les élémens de la courbe étant supposés également pesans, l'équation de la courbe funiculaire devient

$$y = \pm B \log. \left\{ \frac{B + x + \sqrt{(2Bx + x^2)}}{B} \right\},$$

les x étant comptés à partir du point le plus bas de la courbe sur la verticale qui passe par ce point.

Un arc s de cette courbe a pour valeur, à partir de l'origine,

$$s = \sqrt{(2Bx + x^2)}.$$

On peut prendre pour origine tout autre point de la courbe ; et comptant toujours les x à partir de ce point et sur la verticale qui y passe, on a

$$y = \pm B \log. \left\{ \frac{K - x + \sqrt{[(K - x)^2 - B^2]}}{K + \sqrt{(K^2 - B^2)}} \right\}$$

$$s = \{(K - x)^2 - B^2\}^{\frac{1}{2}} - \sqrt{(K^2 - B^2)}.$$

Les constantes K et B se déterminent ou par la connaissance de deux points de la courbe indépendamment de celui de l'origine, ou par celle d'un seul point et de la longueur de la courbe, depuis l'origine jusqu'à ce point.

177. Le second exemple de l'application des principes de la statique à l'équilibre d'un système de forme variable, est celui où on considère un nombre infini de points matériels incompressibles, placés à la suite les uns des autres, dans une courbe telle que l'un quelconque de ces points sollicité par les puissances qui agissent immédiatement sur lui, et par la pression des deux points immédiatement voisins, soit en équilibre.

Si l'on applique le principe de la composition des forces à la recherche de l'équation de cette courbe, on trouve que cette équation est précisément la même donnée art. 174 pour la courbe funiculaire ; seulement, dans le cas actuel, les puissances ont une direction contraire à celle qu'on leur a supposée dans le cas de l'article cité.

Il suit de là que le principe des vîtesses virtuelles a lieu dans l'équilibre

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		nelle au rayon de courbure du point de la courbe où elle est appliquée.	121. Trouver l'équation de la courbe funiculaire uniformément grosse dans le cas de la pesanteur.
			122. Rectifier la courbe funiculaire uniformément grosse dans le cas de la pesanteur.
		86. La courbe sur laquelle un nombre infini de points matériels incompressibles, sollicités par des puissances quelconques et juxtaposés les uns contre les autres, sont en équilibre, est la même que la courbe funiculaire; les puissances sollicitantes ayant, dans l'un et l'autre cas, des directions contraires.	123. Trouver l'équation de la courbe sur laquelle un nombre infini de points matériels incompressibles, sollicités par des puissances quelconques et juxtaposés les uns contre les autres, sont en équilibre.
	40. D'une voûte en berceau et des parties qui la composent.		
	41. Des joints de rupture d'une voûte en berceau.		

de plusieurs points matériels juxtaposés, puisqu'il a lieu dans celui du polygone et de la courbe funiculaire.

178. On peut faire quelques applications utiles de la théorie précédente, en se permettant de considérer les points matériels en équilibre, comme des masses pesantes de grandeurs finies qui composeraient les voussoirs d'une voûte en berceau.

Pour trouver la relation entre les deux parties de la voûte séparées par un joint quelconque, on a

$$M \text{ tang. } \varepsilon = (M - 2m) \text{ tang. } a,$$

M étant la partie de la voûte comprise entre les joints de rupture, m la partie de la voûte comprise entre un des joints de rupture, et le joint quelconque qui fait un angle ε avec la verticale; a l'angle que fait un des joints de rupture avec la verticale.

Différenciant l'équation précédente aux différences finies, on a, pour le rapport entre la masse Δm d'un voussoir quelconque, et l'incrément $\Delta(\text{tang. } \varepsilon)$ qui est donné par l'angle que forment les deux joints de lits consécutifs qui terminent ce voussoir,

$$\Delta m = \frac{\Delta(\text{tang. } \varepsilon)}{2 \text{ tang. } a} M.$$

Ensuite l'équation différentielle de la courbe de l'intradòs est, en prenant l'origine des x et y au sommet, et comptant les x sur la verticale qui passe par ce sommet,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{(M - 2m) \text{ tang. } a}.$$

Enfin, pour tracer la courbe de l'extrados, on calcule la longueur du joint de lit ou la distance de l'intrados à l'extrados, pour un point quelconque, au moyen de l'équation suivante

$$k = -r \pm \sqrt{\left(\frac{M}{\text{tang. } a \cos.^2 \varepsilon} + r^2\right)},$$

ou on peut éliminer ε au moyen de l'équation $\cos. \varepsilon = \frac{dy}{ds}$.

On peut, au moyen de ces équations, calculer, dans chaque cas, tout ce qui est nécessaire pour l'*équerre* et l'*épure* d'une voûte composée de voussoirs pesans en équilibre, abstraction faite du frottement.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			124. Trouver les équations qui donnent, dans le cas de l'équilibre, 1.° la relation entre les masses des deux parties d'une voûte en berceau, séparées par un joint de lit quelconque;
			2.° La relation entre la masse d'un voussoir quelconque, et l'angle formé par les joints de lit qui le terminent;
k = la longueur du joint de lit qui fait un angle ε avec la verticale. r = le rayon de courbure pris sur la direction de k.			3.° La courbe de l'intrados.
M et N sont respectivement les poids absolus de la voûte entre les joints de rupture et d'un des pieds-droits; et l'on comprend dans ce pied-droit toute la portion de voûte comprise entre les naissances et le point de rupture.			4.° La distance de l'intrados à l'extrados, où la longueur d'un joint de lit quelconque.

Ainsi, 1.° étant donnée la loi suivant laquelle varie le profil de la voûte, c'est-à-dire, l'expression variable de m ou de Δm, on trouvera la courbe de l'intrados, la longueur et l'inclinaison des joints de lit; 2.° étant donnée la courbe de l'intrados, on trouvera la masse de chaque voussoir, l'inclinaison et la longueur de ses joints de lit; 3.° étant donnée la loi de la longueur des joints de lit, on en déduira le profil des voussoirs et la courbe de l'intrados.

179. Il est bon d'ajouter aux formules précédentes, celles qui se rapportent à la poussée de la voûte contre ses pieds-droits.

Les deux formules fondamentales qui renferment les conditions de l'équilibre entre la poussée de la voûte et la résistance du pied-droit, sont

$$\left.\begin{array}{l} N = \dfrac{hk' - bh'}{2h'k} M \\[2ex] N = \dfrac{p}{2q \sin. a} M \end{array}\right\} \text{dans l'hypothèse du renversement.}$$

$$N = \frac{g}{2f \operatorname{tang.} a} M. \Big\} \text{ dans l'hypothèse du glissement.}$$

Les quantités M, p et q dépendent des dimensions de la voûte, de sa forme, et des conditions auxquelles on peut être assujetti soit pour la hauteur des pieds-droits, soit pour d'autres particularités.

Il faut bien observer que les deux premières des trois équations précédentes expriment des conditions d'équilibre tout-à-fait indépendantes de celles exprimées par la troisième, conditions qui, en général, ne sont point remplies avec la même valeur de N; c'est ce qui résulte de la théorie exposée art. 137 et suivans.

J'ajouterai que la première des deux formules d'équilibre, dans l'hypothèse du renversement, se rapporte aux effets observés lors du décintrement des grandes arches (celles particulièrement dont la courbe d'intrados est un arc de cercle d'un grand rayon); les joints s'ouvrent à l'intrados, vers la clef, et à l'extrados du côté des naissances, de part et d'autre d'un joint moyen qui conserve le parallélisme. *(Voyez les Œuvres de Perronet, pag. 601 et suiv., édition in-4.°).* La seconde de ces formules est déduite de la théorie du plan incliné ou du coin: c'est dans la science de la construction qu'on apprendra les cas où il faut se servir de l'une ou de l'autre.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$p =$ perpendiculaire menée de l'extrémité inférieure du parement intérieur du pied-droit sur la ligne qui, perpendiculaire au joint de rupture, passe par le milieu de ce joint.			
$q =$ distance entre l'extrémité du parement intérieur du pied-droit, et la verticale passant par le centre d'inertie de ce pied-droit.	42. Des *pieds droits* d'une voûte en berceau qui prennent le nom de *culée*, et de *piles* lorsqu'il s'agit d'un pont.		125. Trouver les deux équations fondamentales qui expriment les conditions de l'équilibre entre la poussée d'une voûte en berceau et la résistance de ses pieds-droits.
$f =$ puissance qui s'oppose au glissement horizontal du pied-droit sur sa plate-forme.			
$a =$ angle du joint de rupture et de la verticale.			
$g =$ la force accélératrice de la pesanteur.			
k et k' sont les distances horizontales respectives de l'extrémité inférieure du parement intérieur du pied-droit et de l'intrados du joint de rupture, aux verticales menées par les centres d'inertie du pied-droit et de la portion de voûte comprise entre la clef et le joint de rupture.			
$b =$ la distance horizontale de l'extrémité inférieure du parement intérieur du pied-droit à la verticale menée par l'intrados du joint de rupture.			
h et h' sont, respectivement, les distances verticales de l'intrados du joint de rupture à la base du pied-droit et à l'extrados de la clef.			

SECONDE SECTION.

DYNAMIQUE.

180. La dynamique est la partie de la mécanique qui fait entrer le temps en considération, et a pour objet l'action des forces sur les corps solides, de laquelle il résulte un mouvement.

181. La méthode la plus sûre et la plus simple de traiter les questions de mouvement, est de les ramener à des problèmes d'équilibre qui peuvent toujours se mettre en équation ; on y parvient par le principe communément attribué à *d'Alembert*, exposé précédemment (théorème 15) pour un cas particulier. Le théorème 87 offre l'énonçé le plus général dont ce principe soit susceptible.

182. Il faut ensuite, pour faciliter l'application de ce principe, distinguer dans le mouvement d'un système, deux choses qui sont indépendantes, et qui doivent être considérées séparément : savoir, le mouvement du centre d'inertie, et celui des autres parties du système autour du centre ; la détermination du premier n'a aucune difficulté, et n'exige que l'emploi des formules de l'art. 116 qui se rapportent au mouvement

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	43. De la Dynamique.		
		87. Si des causes quelconques de mouvement tendent à produire un changement dans l'état de mouvement ou de repos d'un système de points matériels, concevez le changement de mouvement que chaque point matériel éprouverait en vertu de l'action de ces causes, s'il était libre, comme décomposé en deux, dont l'un soit celui qui aura réellement lieu, eu égard à la liaison de ce point au reste du système; l'autre sera tel que s'il représentait en quantité et en direction la cause perturbatrice, l'état de mouvement ou de repos du système ne changerait point.	
		88. Un système de forme invariable étant sollicité par des puissances à directions parallèles dont chacune est proportionnelle à la masse de son point d'application, tous les points de ce système tendront à se mouvoir	126. Trouver les équations du mouvement d'un système de forme invariable, lorsque la résultante des puissances qui le sollicitent passe par son centre d'inertie.

d'un point; mais celle du second n'offre pas à beaucoup près la même facilité. *Voyez* les théorèmes 88, 89, 90 et 91.

183. Le mouvement de rotation étant donc le seul pour lequel la théorie précédemment exposée est insuffisante, et son indépendance du mouvement de translation permettant de le considérer à part, nous nous en occuperons presque uniquement dans cette section. Les expressions analytiques qu'on rencontre dans les différentes recherches auxquelles ce problème donne lieu, renferment toutes une quantité qu'on nomme *moment d'inertie*, qui est la somme des produits des molécules d'un corps par les carrés de leurs distances à un axe de position donnée : voici les propositions et les formules principales qui s'y rapportent.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		dans des directions parallèles et avec des vîtesses égales.	
		89. La même propriété aura lieu dans tous les cas où la résultante des forces, appliquées au système, passera par le centre d'inertie.	
		90. Lorsque la résultante des puissances qui sollicitent un système de forme invariable, passe par son centre d'inertie, ce système se meut de la même manière que si toute sa masse était concentrée en un seul point, auquel chaque puissance sereit appliquée parallélement à sa direction.	
	44. Du moment d'inertie.	91. Lorsque la résultante des forces appliquées à un système de forme invariable ne passe pas par son centre d'inertie, ce centre se meut de la même manière que si toutes les puissances lui étaient immédiatement appliquées chacune parallélement à sa direction, et le système tourne autour du centre d'inertie, de la même manière que si ce centre était fixe.	127. Trouver les équations du mouvement du centre d'inertie d'un système de forme invariable, lorsque la résultante des puissances qui sollicitent ce système ne passe pas par son centre d'inertie.

Le moment d'inertie, toujours essentiellement positif, rapporté à l'axe des x, a pour valeur

$$S\{m(y^2 + z^2)\};$$

et rapporté à un axe parallèle, celui des x qui a les lignes a et b pour coordonnées de l'un quelconque de ses points, sa valeur devient

$$S\{m(y^2 + z^2)\} - 2(aSmy + bSmz) + (a^2 + b^2)Sm.$$

Si l'axe des x passe par le centre d'inertie, on a $Smy = 0$ et $Smz = 0$, art. 159; et cette expression devient

$$S\{m(y^2 + z^2)\} + r^2 M.$$

184. Les momens d'inertie par rapport aux trois axes coordonnés, sont respectivement

axe des $x \ldots B + C$; axe des $y \ldots A + C$; axe des $z \ldots A + B$;

Ayant ces trois momens, on connaîtra celui rapporté à une ligne passant par l'origine, faisant un angle θ avec le plan xy, et dont la projection sur ce plan xy fait un angle η avec l'axe des x, au moyen de la formule

$$A(\sin.^2\eta + \cos.^2\eta\sin.^2\theta) + B(\cos.^2\eta + \sin.^2\eta\sin.^2\theta) + C\cos.^2\theta - 2D\sin.\eta\cos.\eta\cos.^2\theta$$
$$- 2E\cos.\eta\sin.\theta\cos.\theta$$
$$- 2F\sin.\eta\sin.\theta\cos.\theta.$$

Ce moment d'inertie connu, on peut, par l'article précédent, l'évaluer par rapport à tout autre axe parallèle à celui qu'on vient de considérer; on peut donc, lorsqu'on connaît le moment d'inertie par rapport aux trois axes coordonnés, l'évaluer par rapport à une ligne quelconque donnée de position dans l'espace.

185. La recherche de l'expression précédente suppose des transformations des coordonnées x, y, z en coordonnées $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$ ayant toutes même origine, qui conduisent aux formules suivantes.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$Sm = M$		92. Le moment d'inertie d'un corps est toujours essentiellement positif.	128. Le moment d'inertie étant donné par rapport à un axe, trouver sa valeur par rapport à un autre axe parallèle à celui-là.
$r = \sqrt{(a^2 + b^2)} =$ la distance entre les deux axes.			129. Appliquer la solution précédente au cas où le premier axe passe par le centre d'inertie.
$Sm\ x^2 = A$ $Sm\ y^2 = B$ $Sm\ z^2 = C$ $S(mxy) = D$ $S(mzx) = E$ $S(mzy) = F$		93. Le moment d'inertie, par rapport à chacun des axes coordonnés, est toujours plus petit que la somme des momens par rapport aux deux autres axes.	130. Donner la valeur des momens d'inertie par rapport à chacun des axes coordonnés.
			131. Connaissant le moment d'inertie par rapport à chacun des axes coordonnés, trouver ce moment par rapport à une ligne de direction quelconque qui passerait par l'origine.
			132. Appliquer les solutions des problèmes 127 et 130 à la détermination du moment d'inertie par rapport à une ligne quelconque donnée de position dans l'espace.
			133. Une ligne qui passe par l'origine et qui a une direction donnée étant prise pour l'axe des x,

Prenons la ligne qui, passant par l'origine, fait un angle θ avec le plan xy, et dont la projection sur ce plan xy fait avec l'axe des x un angle n, pour l'axe des x_i;

Menons à cet axe des x_i, dans le plan xy, une perpendiculaire que nous prendrons pour l'axe des y_i;

Enfin, prenons pour axe des z_i la perpendiculaire au plan $x_i y_i$ passant par l'origine; on aura pour le rapport des coordonnées primitives et transformées d'un même point du système,

$$x_i = z \sin.\theta + (y \sin.n + x \cos.n) \cos.\theta = x \cos.\alpha + y \cos.\beta + z \cos.\gamma$$

$$y_i = y \cos.n - x \sin.n = \frac{y \cos.\alpha - x \cos.\beta}{\sin.\gamma}$$

$$z_i = z \cos.\theta - (y \sin.n + x \cos.n) \sin.\theta = z \sin.\gamma - (y \cos.\beta + x \cos.\alpha) \cos.\gamma$$

et pour les sommes $S(mx_iy_i)$, $S(mx_iz_i)$ $S(my_iz_i)$

$$S(mx_iy_i) = (B - A) \sin.n \cos.n \cos.\theta + D \cos.\theta (\cos.^2 n - \sin.^2 n) - E \sin.n \sin.\theta + F \sin.n \cos.\theta$$

$$S(mx_iz_i) = (C - A \cos.^2 n - B \sin.^2 n) \sin.\theta \cos.\theta - 2 D \sin.n \cos.n \sin.\theta \cos.\theta + (E \cos.n + F \sin.n)(\cos.^2\theta - \sin.^2\theta)$$

$$S(my_iz_i) = (A - B) \sin.n \cos.n \sin.\theta - D (\cos.^2 n - \sin.^2 n) \sin.\theta - (E \sin.n - F \cos.n) \cos.\theta.$$

186. Si l'on nomme T l'expression donnée article 184, et qu'on y regarde θ et n comme variables, on aura

$$\left(\frac{dT}{dn}\right) = -2 \cos.\theta . S(mx_iy_i)$$

$$\left(\frac{dT}{d\theta}\right) = -2 S(mx_iz_i).$$

187. L'expression donnée art. 184, fournit le moyen de résoudre un problème très-important, qui a pour objet la recherche de l'axe passant par l'origine des coordonnées, par rapport auquel la différentielle du moment d'inertie est nulle. On trouve, en égalant à zéro les valeurs des différentielles précédentes, que la position de cet axe est donnée par les équations

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{(A - B) \sin.n \cos.n - D(\cos.^2 n - \sin.^2 n)}{F \cos.n - E \sin.n}$$

$$0 = \left\{\begin{array}{l} \{(E^2 - D^2) F + (B - C) DE\} \text{tang.}^3 n \\ + \{E^3 - 2EF^2 + D^2E + (B - 2A + C)DF - (B - A)(B - C)E\} \text{tang.}^2 n \\ + \{F^3 - 2E^2B + D^2F + (A - 2B + C)DE - (A - B)(A - C)F\} \text{tang.}\, n \\ + E(F^2 - D^2) + (A - C)DF. \end{array}\right.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
α, β et γ sont les angles formés, respectivement, par l'axe des $x_{,}$ et par ceux des x, y et z.			une perpendiculaire à cette ligne, menée par l'origine dans le plan xy, étant prise pour l'axe des $y_{,}$ et une perpendiculaire au plan $x_{,}y_{,}$ menée à l'origine, étant prise pour l'axe des $z_{,}$, trouver les valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ en fonctions de x, y et z.
			134. Trouver dans l'hypothèse du problème précédent les valeurs de $S(mx_{,}y_{,})$, $S(mx_{,}z_{,})$ et $S(my_{,}z_{,})$, en fonctions de A, B, C, D, E et F.
		94. La différentielle du moment d'inertie par rapport à l'axe des $x_{,}$, prise en faisant varier successivement η et θ, a respectivement pour valeur $-2\cos.\theta\, S(mx_{,}y_{,})$ et $-2\, S(mx_{,}z_{,})$.	
			135. Trouver la position d'un axe passant par un point donné du système par rapport auquel la différentielle du moment d'inertie est égale à zéro.

On voit qu'il y a trois lignes qui satisfont à la question ; et comme, par la nature du problème, l'équation doit avoir deux solutions réelles (l'une pour le *maximum* et l'autre pour le *minimum* absolu), les trois racines sont nécessairement réelles, et les lignes dont elles donnent la position se nomment *axes principaux.*

188. De plus, en nommant T l'expression donnée art. 184, dont la différenciation a fourni les valeurs de θ et η au moyen des équations

$$\left(\frac{dT}{d\theta}\right) = 0 \left(\frac{dT}{d\eta}\right) = 0,$$

on voit par l'article 186, qu'on doit avoir, par rapport à la ligne cherchée, considérée comme l'axe des x,

$$S(mx_{\prime}y_{\prime}) = 0,$$
$$S(mx_{\prime}z_{\prime}) = 0.$$

189. Les formules de l'article 187 exigent des calculs presque impraticables ; mais si l'on suppose que la position d'une des trois lignes cherchées est connue, il sera aisé d'en déduire la position des deux autres. La ligne connue de position étant l'axe des $x_{\prime}$, et rapportant au plan $x_{\prime}y_{\prime}$, la position d'une des autres, on trouve

$$\cos.\ \eta_{\prime} = 0,\ \text{tang. } 2\,\theta_{\prime} = \frac{2F_{\prime}}{B_{\prime} - C_{\prime}}.$$

La première équation énonce que la ligne cherchée est dans le plan des $y_{\prime}z_{\prime}$, et on voit par la seconde, qu'il y a dans ce plan des $y_{\prime}z_{\prime}$, deux lignes à angle droit l'une sur l'autre, qui satisfont à la question, l'une faisant un angle $\theta_{\prime}$, et l'autre un angle $(\theta_{\prime} + \frac{1}{4}$ circonf.$^{e})$ avec l'axe des $y_{\prime}$.

Ce résultat nous présente une propriété très-remarquable des corps, énoncée dans le théorème 96.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	45. Des axes principaux.		
		95. Un axe principal, c'est-à-dire, par rapport auquel la différentielle du moment d'inertie est nulle, étant considéré comme l'axe des x, on a $S\,(m\,xy) = 0$ et $S\,(m\,xz) = 0$.	
			136. Connaissant la position d'un axe principal qui passe par un point donné, trouver celle des deux autres axes principaux passant par le même point.
Les lettres accentuées désignent, par rapport aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, les quantités analogues à celles que les mêmes lettres non accentuées désignent par rapport aux axes des x, y et z.			
		96. On peut toujours faire passer par un point quelconque d'un corps, trois lignes à angle droit l'une sur l'autre, telles que la différentielle du moment d'inertie, par rapport à chacune d'elles, est égale à zéro.	

190. Si l'on a $F_{,} = 0$ et $B_{,} = C_{,}$, la valeur de $\theta_{,}$ devient indéterminée ; et toute ligne menée dans le plan $y_{,} z_{,}$, et passant par l'origine, est un axe principal.

191. Les axes des x, y et z étant supposés des axes principaux, on a les trois équations du théorème 98, qui se déduisent aisément de celles du théorème 97.

192. Les axes principaux étant toujours supposés axes des coordonnées, la valeur du moment d'inertie de l'article 184, par rapport à une ligne de position donnée qui passerait par l'origine, se simplifie beaucoup, et devient

$$A(\sin.^2 n + \sin.^2 \theta \cos.^2 n) + B(\cos.^2 n + \sin.^2 n \sin.^2 \theta) + C \cos.^2 \theta.$$

Si, en nommant M la masse totale, on exprime de la manière suivante les momens d'inertie par rapport à chaque axe,

$$Ma^2 = B + C; \quad Mb^2 = A + C; \quad Mc^2 = A + B;$$

d'où

$$a = \sqrt{\left(\frac{B+C}{M}\right)}; \qquad b = \sqrt{\left(\frac{A+C}{M}\right)} \quad \text{et } c = \sqrt{\left(\frac{A+B}{M}\right)};$$

$$A = \tfrac{1}{2} M(-a^2 + b^2 + c^2); \; B = \tfrac{1}{2} M(a^2 - b^2 + c^2); \; C = \tfrac{1}{2} M(a^2 + b^2 - c^2),$$

la valeur du moment d'inertie deviendra

$$M(a^2 \cos.^2 \theta \cos.^2 n + b^2 \cos.^2 \theta \sin.^2 n + c^2 \sin.^2 \theta),$$

qu'on peut aussi énoncer par l'expression

$$M(a^2 \cos.^2 \alpha + b^2 \cos.^2 \beta + c^2 \cos.^2 \gamma).$$

193. Si, en considérant toujours les axes principaux comme axes des

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		97. L'axe des x étant un axe principal, si on a $S(mzy)=0$ et $S(my^2)=S(mz^2)$, toute ligne passant par l'origine et menée dans le plan des yz sera un axe principal. 98. Les axes des x, y et z étant des axes principaux, on a $S(m\,xy)=0$; $S(m\,xz)=0$; $S(m\,yz)=0$.	137. Les axes des coordonnées étant des axes principaux, trouver le moment d'inertie par rapport à une ligne de direction donnée, qui passe par l'origine.

coordonnées, on suppose que les momens d'inertie par rapport à ces axes aient entre eux les relations suivantes,

$$\left.\begin{array}{l} Ma^2 > Mb^2 \quad ; \quad Mb^2 > Mc^2 \\ \text{ou} \quad B + C > A + C; \; A + C > A + B \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{d'où on déduit} \\ a^2 > b^2; \; b^2 > c^2 \\ A < B; \; B < C; \end{array}$$

ensuite, la dernière équation de l'article précédent, qui donne la valeur du moment d'inertie par rapport à une ligne de position quelconque passant par l'origine, est, en observant que $\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma = 1$, susceptible d'être mise sous les deux formes suivantes :

$$Ma^2 - M(a^2 - b^2)\cos.^2 \beta - M(a^2 - c^2)\cos.^2 \gamma$$

$$Mc^2 + M(a^2 - c^2)\cos.^2 \alpha + M(a^2 - b^2)\cos.^2 \beta;$$

ce qui fait voir que le moment d'inertie par rapport à une ligne quelconque passant par l'origine, est toujours plus petit que Ma^2, et plus grand que Mc^2; conséquence nécessaire de ce que la différentielle du moment d'inertie par rapport aux axes principaux étant nulle, l'un de ces axes doit être un *maximum* et l'autre un *minimum*.

194. PRENONS la ligne par rapport à laquelle on vient d'évaluer le moment d'inertie pour l'axe des x_i, et construisons les axes des y_i et des z_i comme à l'article 189; nous aurons

$$S(mx_iz_i) = M\{(a^2 - c^2)\cos.^2 \alpha + (b^2 - c^2)\cos.^2 \beta\}\cos.\gamma$$

$$S(mx_iy_i) = M\;(a^2 - b^2)\frac{\cos.\alpha\cos.\beta}{\sin.\gamma}.$$

Plus ces quantités seront petites, et plus la ligne dont il s'agit approchera d'être un axe principal : elle le sera, lorsque ces quantités seront nulles.

195. CES quantités seront toujours nulles, lorsqu'on aura $a^2 = b^2 = c^2$, et le seront indépendamment de toute valeur de α, β et γ : dans ce cas, qui, comme on voit, est celui où les trois momens d'inertie Ma^2, Mb^2, Mc^2 sont égaux, toutes les lignes passant par l'origine seront des axes principaux par rapport auxquels la valeur commune du moment d'inertie $Ma^2\cos.^2 \alpha + Mb^2\cos.^2 \beta + Mc^2\cos.^2 \gamma$, sera Ma^2, à cause de $\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma = 1$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		99. Les trois axes principaux étant pris pour axes des coordonnées, le moment d'inertie par rapport à une ligne quelconque, passant par l'origine, a toujours une valeur intermédiaire entre le plus grand et le plus petit moment par rapport aux axes des coordonnées. 100. Lorsque les trois momens d'inertie par rapport à trois axes principaux qui se coupent en un même point, sont égaux, les momens d'inertie par rapport à toutes les lignes passant par le point commun d'inter-	138. Trouver, par rapport à un axe quelconque considéré comme axe des x, les valeurs de $S\,(mxz)$ et $S\,(mxy)$ en fonctions de quantités qui appartiennent aux momens d'inertie par rapport aux axes principaux passant par l'origine, avec lesquels l'axe dont il s'agit forme des angles α, β et γ; déterminer combien ce même axe s'approche d'être un axe principal.

196. Lorsque deux axes principaux seulement auront leurs momens d'inertie égaux, on pourra, au moyen de la table suivante, reconnaître ce qui en résulte :

HYPOTHÈSE.	MOMENT D'INERTIE en introduisant l'hypothèse ci à côté, dans la formule générale $Ma^2 \cos.^2 \alpha + Mb^2 \cos.^2 \beta + Mc^2 \cos.^2 \gamma$.
$Ma^2 = Mb^2$........	$Ma^2 (1 - \cos.^2\gamma) + Mc^2 \cos.^2\gamma$
$Ma^2 = Mc^2$........	$Mc^2 (1 - \cos.^2\beta) + Mb^2 \cos.^2\beta$
$Mb^2 = Mc^2$........	$Mb^2 (1 - \cos.^2\alpha) + Ma^2 \cos.^2\alpha$.

Si l'on fait respectivement, pour chaque cas, $\cos. \gamma = 0$, $\cos. \beta = 0$ et $\cos. \alpha = 0$, on trouvera que lorsque deux momens d'inertie par rapport à deux axes principaux sont égaux, tous les momens d'inertie par rapport à des lignes menées dans le plan de ces axes et passant par leur intersection, sont aussi égaux ; ce qui s'accorde avec le résultat de l'article précédent.

197. Le moment d'inertie par rapport à une ligne passant par un point quelconque du système, est toujours plus grand, art. 183, que le moment d'inertie par rapport à une parallèle à cette ligne passant par le centre d'inertie (la différence Mr^2 étant toujours positive) ; d'où il suit que le plus petit des momens d'inertie de tout le système se rapporte à un des axes principaux passant par le centre d'inertie.

198. On déduit sur-le-champ une première conséquence, de la théorie précédente relative à la rotation d'un système autour d'un axe principal (qu'on suppose être l'axe des z) passant par le centre d'inertie. On a pour les composantes des forces centrifuges

$$\text{parallélement aux axes}\ldots\left\{\begin{array}{l}\text{des } x \ldots \vartheta^2 . S(mx)\\ \text{des } y \ldots \vartheta^2 . S(my),\end{array}\right.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		section auront la même valeur, et toutes ces lignes seront des axes principaux.	
		101. Lorsque les momens d'inertie par rapport à deux axes principaux, pris pour un même point, sont égaux, tous les momens d'inertie par rapport à des lignes menées dans le plan de ces axes et passant par leur point d'intersection, sont aussi égaux. Il résulte de ce théorème et du précédent, que les axes principaux, pour un point donné, sont ou au nombre de trois, ou en nombre infini.	
		102. Le *minimum minimorum* des momens d'inertie du système se rapporte à un des axes principaux passant par le centre d'inertie.	
ϑ = la vîtesse angulaire.		103. Un système ou corps de forme invariable étant supposé tourner avec une vîtesse angulaire constante autour d'un axe principal qui passe par	

et pour les momens de ces composantes

par rapport aux axes.... $\begin{cases} \text{des } x \ldots \gamma^2 . S(myz) \\ \text{des } y \ldots \gamma^2 . S(mxz). \end{cases}$

Mais par la double condition que le centre d'inertie est à l'origine, et que l'axe de rotation est un axe principal, toutes ces quantités sont nulles; d'où il suit que cet axe ne supporte aucun effort de la part des forces centrifuges.

199. SUPPOSONS maintenant que chaque point d'un système assujetti à tourner autour d'un axe fixe quelconque, est sollicité par une puissance dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe, on aura, pour évaluer l'action de cette puissance,

dans le sens du rayon ρ .... $\varphi m \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)}$;

perpendiculairement au rayon ρ .... $\frac{r}{\rho} \varphi m$.

Ce sont les forces motrices qui auraient lieu, si le point dont il s'agit tournait seul autour de l'axe de rotation : la première est détruite par la résistance de cet axe, et la seconde produira un accroissement instantanée de quantité de mouvement $= \frac{r}{\rho} \varphi m dt$.

200. CONSIDÉRANT ensuite tous les points matériels du système comme liés les uns aux autres, de manière que leurs distances respectives soient invariables, et appliquant à cette condition le théorème général 87, on a

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{\varphi' r' m' + \varphi'' r'' m'' + \&c.}{\rho'^2 m' + \rho''^2 m'' + \&c.};$$

c'est ce qu'on nomme la *force accélératrice angulaire*.

201. LORSQU'UN corps tourne autour d'un axe fixe avec une vîtesse quelconque, chaque point de ce corps a une vîtesse égale au produit de sa distance à l'axe de rotation par la vîtesse angulaire ; ainsi, la vîtesse angulaire, les masses de tous les points matériels et la forme du système étant donnés, on peut trouver une quantité de mouvement unique, égale à la somme des quantités de mouvement qui ont lieu, laquelle, appliquée

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		le centre d'inertie, cet axe ne supporte aucun effort de la part des forces centrifuges; et soit qu'il ait, ou non, des points fixes, le corps, qu'on suppose n'être sollicité par aucune puissance, tournera pendant un temps indéfini autour de cet axe avec la même vîtesse angulaire.	
φ = puissance appliquée à un point matériel quelconque du système ou force accélératrice qui serait imprimée au point s'il était libre. m = masse du point matériel. r = perpendiculaire menée de l'axe de rotation sur la direction de φ. ρ = distance du point matériel à l'axe.			139. Un système de forme invariable assujetti à tourner autour d'un axe fixe, étant sollicité par des puissances qui agissent dans des plans perpendiculaires à cet axe, trouver pour un point matériel quelconque les composantes dirigées, soit dans le sens du rayon du cercle que ce point peut décrire, soit perpendiculairement à ce rayon de la force motrice qui serait imprimée à ce point matériel s'il était libre.
γ = vîtesse angulaire. ω = arc décrit au bout du temps t.	46. De la force accélératrice angulaire.		
			140. Un système de forme invariable tournant avec une vîtesse quelconque autour d'un axe fixe, trouver à quelle distance de cet axe une quantité de mouvement qui aurait

normalement sur un point d'une ligne passant par le centre d'inertie et perpendiculaire à l'axe de rotation, à une distance $\frac{\rho'^2 m' + \rho''^2 m'' + \&c.}{a(m' + m'' + \&c.)}$ de cet axe, et en sens contraire de la rotation, fera équilibre à toutes les quantités de mouvement qui ont lieu.

202. Le point qu'on vient de déterminer, se nomme *centre de percussion.* Sa position est tout-à-fait indépendante des puissances qui agissent sur le système et de sa vîtesse angulaire : elle est uniquement donnée, comme celle du centre d'inertie, par les rapports et les positions respectives des masses des molécules qui composent ce système.

203. Lorsqu'un corps pesant tourne autour d'un axe horizontal immobile, en partant d'une position donnée où sa vîtesse initiale était zéro, le mouvement de chacun de ses points diffère de celui que ce même point aurait s'il oscillait seul autour de l'axe immobile. En effet, la vîtesse angulaire que la pesanteur tend à donner aux points les plus près de l'axe, est plus grande que celle qu'auraient les plus éloignés, art. 124; et en vertu de la liaison de tous ces points, la première vîtesse est ralentie et la seconde est augmentée. Il existe donc nécessairement un point intermédiaire dont la vîtesse n'est ni ralentie ni augmentée : les oscillations de ce point, supposées libres, et celles du corps seraient *synchrones*, c'est-à-dire, s'exécuteraient dans le même temps.

Le point dont il s'agit s'appelle *centre d'oscillation.* Le corps oscillant prend le nom de *pendule composé*, lorsqu'il est soumis à la pesanteur.

204. La vîtesse initiale du pendule composé étant toujours supposée nulle, sa vîtesse angulaire lorsqu'il aura décrit un angle θ, sera

$$\gamma = \sqrt{\left[\frac{2ag}{a^2 + k^2}(\cos.\theta - \cos.f)\right]};$$

et la longueur du pendule simple synchrone est

$$\varepsilon = \frac{a^2 + k^2}{a};$$

205. Cette valeur de ε est égale à celle trouvée art. 201 pour la distance de l'axe de rotation au centre de percussion : mais cette

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
a = la distance du centre d'inertie à l'axe de rotation.	47. Du centre de percussion.	104. La position du centre de percussion ne dépend que des rapports des masses et des positions respectives des molécules du corps.	pour mesure le produit de la vîtesse absolue du centre d'inertie par la masse totale du corps, ferait équilibre à toutes les quantités de mouvement qui ont lieu dans le système.
ε = distance de l'axe de suspension au centre d'oscillation. ν = vîtesse angulaire. f = angle initial formé par la verticale menée de l'axe de suspension, et par la ligne menée du même axe au centre d'inertie du corps.	48. Du synchronisme. 49. Du centre d'oscillation d'un corps.		141. Un pendule composé oscillant autour d'un axe fixe horizontal, trouver, 1.° Sa vîtesse angulaire lorsqu'il a décrit un angle quelconque;
θ = angle formé au bout du temps t par les mêmes lignes.	50. Du pendule composé.	105. Les problèmes du centre d'oscillation et du	2.° La longueur du pendule simple qui fait ses oscillations dans le même temps.

identité tient à ce que nous avons considéré ici la question sous un point de vue particulier, en supposant que les puissances qui agissaient sur le corps, étaient proportionnelles chacune à la masse de la molécule sur laquelle elles agissaient et avaient des directions parallèles. En faisant d'autres hypothèses, nous n'eussions trouvé pour ε ni la même valeur, ni même une valeur constante. En effet, si l'on met en équation le problème 142, qui présente l'énoncé le plus général de la question, on trouvera

$$\frac{d\varepsilon^2}{d\theta^2} + \varepsilon^2 + \frac{g.(\varepsilon \cos.\theta - b\cos.f).S(\rho^2 m)}{f[d\theta.S(\varphi r m)]} = 0,$$

$S(\varphi rm)$ étant une intégrale définie qui doit être prise dans toute l'étendue de la masse M. Cette intégrale est une fonction de φ, qui elle-même peut être une fonction de l'angle décrit θ; et dans le cas où cette dernière relation a lieu, l'équation finale est de la forme

$$\frac{d\varepsilon^2}{d\theta^2} + \varepsilon^2 + \frac{a(\varepsilon\cos.\theta - b\cos.f)}{f(\theta)} = 0;$$

et c'est l'équation polaire de la courbe cherchée, qui donne la relation entre le rayon vecteur variable ε et l'angle décrit θ. Or, dans le cas des puissances parallèles et proportionnelles aux masses sur lesquelles elles agissent, qui est celui dont l'article précédent offre la solution, ce rayon vecteur a une valeur constante, et la courbe décrite est un cercle.

206. Après avoir examiné les circonstances du mouvement autour d'un axe fixe de rotation, il faut s'occuper d'une question importante, tant par les applications immédiates qu'on peut en faire, que par les conséquences qu'on déduit de sa solution pour les recherches relatives au mouvement de rotation autour d'un axe libre; je veux parler des efforts que supporte un axe fixe autour duquel tourne un corps animé d'une vîtesse et sollicité par des puissances quelconques.

Ces efforts peuvent être rangés en deux classes générales; la première comprend ceux qui sont dus à la seule vîtesse angulaire, ou aux forces centrifuges qui en résultent; la seconde comprend ceux dus à l'action des puissances appliquées aux différens points du système.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$b =$ la distance initiale du point matériel pesant à l'axe de suspension. $\varepsilon =$ la distance du même point au même axe, au bout du temps t. $\vartheta =$ la vîtesse angulaire commune du corps et du point matériel, au bout du temps t. $f =$ la distance angulaire initiale et commune du point matériel et du centre d'inertie du corps, au plan vertical passant par l'axe de suspension. θ est ce que devient cette distance au bout du temps t, en sorte que $f - \theta$ est l'angle parcouru pendant le temps t. $S(\varphi r m) =$ la somme des momens des forces motrices imprimées au corps par rapport à l'axe de suspension. $S(\rho^2 m) =$ le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de suspension. $g =$ la force accélératrice de la pesanteur. $\int \{ d\theta . S(\varphi r m) \} = f(\theta)$. f est le signe de fonction. $g S(\rho^2 m) = a$.		centre de percussion sont en général de nature différente, quoique donnant le même résultat dans un cas particulier.	142. Un corps sollicité par des puissances quelconques, étant assujetti à tourner autour d'un axe horizontal et fixe, tracer une courbe dans le plan, vertical et perpendiculaire à l'axe de rotation, où se trouve le centre d'inertie de ce corps, telle que si un point matériel pesant tombe librement le long de cette courbe, il se trouve toujours dans la ligne droite menée du centre d'inertie du corps, perpendiculairement à l'axe de rotation. Les vîtesses initiales du point matériel et du centre d'inertie sont nulles.

Les efforts de la première espèce s'évaluent aisément par ce qui a été dit art. 198 ; on connaît leur effet à l'origine et à une distance a de l'origine soit dans la direction unique de leur résultante, soit dans deux directions qui fassent un angle droit entre elles.

Pour évaluer les efforts de la seconde espèce, il faut d'abord faire un groupe des composantes parallèles à l'axe de rotation, dont l'effet sur cet axe se calcule par l'article 90 ; considérant ensuite les composantes dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe, on décomposera chacune des forces motrices imprimées dans ces plans, en deux, dont l'une soit celle qui aura lieu, et l'autre celle qui sera détruite. D'après la liaison qui existe entre les parties du système, la première composante ne produira aucune pression sur l'axe, et la seconde le pressera comme si elle lui était immédiatement appliquée ; c'est donc la somme de ces secondes composantes qui donne l'effort produit sur l'axe. L'expression de cette somme renfermant et les forces motrices imprimées aux différens points matériels, et celles qui auront effectivement lieu, toutes ces forces doivent être comprises dans la valeur de la pression totale de l'axe.

Rassemblant toutes les quantités données par l'énumération précédente, on aura pour les efforts supportés par l'axe, qu'on suppose être celui des x,

1.° Dans le sens de sa direction......... X;

2.° à l'origine
- dans le sens de l'axe y... $Y + S\{m[\gamma^2 y - Kz - \frac{1}{a}(Px\cos.\beta - Py\cos.\alpha + \gamma^2 xy - Kxz)]\} = Y_{,}$
- dans le sens de l'axe z... $Z + S\{m[\gamma^2 z - Ky - \frac{1}{a}(Px\cos.\gamma - Pz\cos.\alpha + \gamma^2 xz - Kxy)]\} = Z_{,}$;

3.° à une distance a de l'origine
- dans le plan xy parallélement à l'axe y.......... $\frac{1}{a} S\{m(Px\cos.\beta - Py\cos.\alpha + \gamma^2 xy - Kxz)\} = Y_{,,}$
- dans le plan xz parallélement à l'axe z.......... $\frac{1}{a} S\{m(Px\cos.\gamma - Pz\cos.\alpha + \gamma^2 xz - Kxy)\} = Z_{,,}$.

207. Ainsi tous les efforts perpendiculaires à l'axe sont, en résultat,

à l'origine................ $\sqrt{(Y_{,}^2 + Z_{,}^2)}$

à une distance a de l'origine... $\sqrt{(Y_{,,}^2 + Z_{,,}^2)}$,

dans des directions qui font respectivement avec le plan des xy, des angles dont les tangentes sont $\frac{Z_{,}}{Y_{,}}$ et $\frac{Z_{,,}}{Y_{,,}}$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
X, Y et Z sont les sommes des composantes respectivement parallèles aux axes des x, des y et des z. m = la masse d'une molécule quelconque du corps ou du système. v = sa vîtesse angulaire. x, y et z ses trois coordonnées. P = la puissance qui agit sur elle. α, β et γ sont les angles que la direction P fait respectivement avec les axes des x, des y et des z. r = la plus courte distance entre l'axe de rotation et la direction de P. ρ = distance de m à l'axe de rotation. $K = \frac{S(P m r \sin.\alpha)}{S(\rho^2 m)}\, t.$		106. Un corps de forme invariable étant assujetti à tourner autour d'un axe fixe, si les forces motrices imprimées aux différentes molécules de ce corps, dans des plans perpendiculaires à l'axe, sont chacune décomposées en deux, dont l'une soit celle qui aura lieu, et l'autre celle qui sera détruite ; d'après la liaison qui existe entre les parties du corps, la première ne produira aucune pression sur l'axe, et la seconde opérera sur lui la même pression que si elle lui était immédiatement appliquée.	143. Trouver la valeur de tous les efforts que supporte un axe immobile de rotation, tant dans le sens de sa longueur, que perpendiculairement à sa direction et à deux points déterminés pris sur cette direction, lorsqu'un système de forme invariable, sollicité par des puissances et animé d'une vîtesse quelconques, tourne autour de cet axe. 144. Trouver les quantités et les directions des résultantes de ces efforts.

208. Il faut observer dans l'art. 206, que les forces X, Y et Z ne font partie que des termes qui se rapportent à l'origine. Si l'axe passait par le centre d'inertie, tous les termes de la forme $A . S(my)$ et $B . S(mz)$ s'évanouiraient; et si de plus cet axe était un axe principal, les termes de la forme $C . S(mxy)$ et $D . S(mxz)$ s'évanouiraient aussi; et il ne resterait plus que les termes qui renferment P, c'est-à-dire qu'on aurait

$$Y_{,} = Y - S\left\{\frac{Pm}{a}(x \cos. \beta - y \cos. \alpha)\right\}$$
$$Z_{,} = Z - S\left\{\frac{Pm}{a}(x \cos. \gamma - z \cos. \alpha)\right\}$$
$$Y_{,,} = Y - Y_{,};\ Z_{,,} = Z - Z_{,}.$$

209. Connaissant les efforts que supporte un axe immobile, qu'on suppose être celui des x, autour duquel tourne un corps, il n'est pas difficile d'appliquer à ce corps, des puissances de l'action desquelles il ne résulte aucune pression sur l'axe, qui pourra ainsi, au premier instant de l'action de ces puissances, être regardé comme libre. La vîtesse initiale étant nulle, on a $\aleph = 0$; et comme l'état de la question exige nécessairement qu'il n'y ait pas de composantes parallèles à l'axe, on a nécessairement $\cos. \alpha = 0$, $\sin. \alpha = 1$, $\cos. \gamma = \sin. \beta$.

Désignant ensuite par $N_{,}$, $N_{,,}$, N', N'' les puissances ou forces motrices cherchées, c'est-à-dire, faisant

$$N_{,} = S\left(\frac{a-x}{a} Pm \cos. \beta\right);\ N_{,,} = S\left(\frac{a-x}{a} Pm \sin. \beta\right)$$
$$N' = S\left(\frac{x}{a} Pm \cos. \beta\right);\ N'' = S\left(\frac{x}{a} Pm \sin. \beta\right)$$
$$\frac{S(Prm)}{S(\rho^2 m)} = K,$$

on substituera toutes ces quantités dans les expressions données art. 206, qui sont les valeurs générales des efforts supportés par l'axe; et égalant ces valeurs à zéro, on aura

$$N_{,} = \frac{KS[(a-x)zm]}{a};\ N_{,,} = \frac{KS[(a-x)ym]}{a}$$
$$N' = \frac{KS(xzm)}{a};\ N'' = \frac{KS(xym)}{a}.$$

Ces équations indiquent que toutes les forces supposées appliquées à l'axe, ne font aucun effet sur cet axe; mais elles doivent produire une

NOTATIONS.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			145. Appliquer la solution des deux problèmes précédens, au cas où l'axe de rotation est un axe principal passant par le centre d'inertie.
$N_{,}$ et $N_{,,}$ deux puissances dirigées dans le plan des yz perpendiculairement aux axes des z et des y respectivement à des distances $n_{,}$ et $n_{,,}$ de l'origine. N' et N'' deux puissances respectivement parallèles aux deux premières, dirigées dans un plan parallèle à celui des yz, à des distances n' et n'' de l'axe des x.			146. Un système de forme invariable étant assujetti à tourner autour d'un axe libre, trouver, 1.° les puissances qu'il faut lui appliquer, pour qu'au premier instant de l'action de ces puissances (la vîtesse initiale étant nulle), l'axe ne supporte aucun effort;

rotation initiale, et elles agissent à de certaines distances de l'axe : ce qui donne encore l'équation

$$n_{,} S\{(a-x)zm\} + n_{,,} S\{(a-x)ym\} + n' S(xzm) + n'' S(xym) = a . S(\rho^2 m).$$

Le problème sera résolu, toutes les fois qu'on satisfera aux cinq équations précédentes. On voit que ce problème est indéterminé, puisqu'il contient huit inconnues ; savoir, quatre puissances et quatre distances, dont trois par conséquent sont arbitraires.

Si l'on suppose que l'axe des x, ou de rotation, passe par le centre d'inertie du corps, les équations précédentes se simplifient, et deviennent

$$N_{,} = \frac{-KS(xzm)}{a}\,;\ N_{,,} = \frac{-KS(xym)}{a}\,;\ N' = \frac{KS(xzm)}{a}\,;\ N'' = \frac{KS(xym)}{a}$$

$$(n' - n_{,})\,S(xzm) + (n'' - n_{,,})\,S(xym) = a\,S(\rho^2 m).$$

Mais pour faciliter encore davantage les calculs, on peut décomposer chaque puissance $N_{,}$, $N_{,,}$, N', N'', en deux autres, qui lui soient parallèles, et dont l'une passe par l'origine ; savoir :

PUISSANCES décomposées.	1.re COMPOSANTE.	DISTANCE A L'ORIGINE de la 1.re composante.	2.e COMPOSANTE appliquée à l'origine.
$N_{,}$ en.......	$P_{,}$	$p_{,}$	$Q_{,}$
$N_{,,}$.........	$P_{,,}$	$p_{,,}$	$Q_{,,}$
N'..........	P'	p'	Q'
N''.........	P''	p''	Q''

et les équations précédentes seront remplacées par celles-ci ; savoir :

$$P_{,} = Q_{,} - \frac{S(Prm)}{a . S(\rho^2 m)} . S(xzm)$$

$$P_{,,} = Q_{,,} - \frac{S(Prm)}{a . S(\rho^2 m)} . S(xym)$$

$$P' = Q' + \frac{S(Prm)}{a . S(\rho^2 m)} . S(xzm)$$

$$P'' = Q'' + \frac{S(Prm)}{a . S(\rho^2 m)} . S(xym)$$

$$a . S(\rho^2 m) = \frac{a . S(\rho^2 m)}{S(Prm)} (a_{,} p_{,} + Q_{,,} p_{,,} + Q' p' + Q'' p'') + (p' - p_{,})\, S(xzm) + (p'' - p_{,,}) . S(xym).$$

On tire de cette équation,

$$S(Prm) = \frac{a . (Q_{,} p_{,} + Q_{,,} p_{,,} + Q' p' + Q'' p'') . S(\rho^2 m)}{(p_{,} - p')\, S(xzm) + (p_{,,} - p'')\, S(xym) + a . S(\rho^2 m)},$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.

dans laquelle on pourra se donner arbitrairement toutes les inconnues qui entrent dans le second membre ; savoir , $Q_{,}$, $Q_{,,}$; Q', Q'', $p_{,}$, $p_{,,}$, p', p'' ; au moyen de quoi la somme $S(Prm)$ sera déterminée, et les quatre équations précédentes offriront les quatre inconnues $P_{,}$, $P_{,,}$, P', P'', toutes dégagées et exprimées en quantités dont on a la valeur.

210. La somme $S(Prm)$ du moment étant connue, la force accélératrice angulaire naissante l'est aussi, puisque, art. 200, on a $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{S(Prm)}{S(\rho^2 m)}$: on sait, article cité, que γ est la vîtesse angulaire.

211. Les questions que nous venons de traiter, nous fournissent le moyen de résoudre d'une manière très-simple et très-élégante un premier problème sur la rotation autour d'un axe libre. *Voyez* son énoncé, n.° 147, et le résultat de sa solution, théorème 107.

212. Nous pouvons maintenant traiter le cas où la puissance appliquée à un corps pris dans l'état de repos, est donnée, et où l'on cherche la position de l'axe autour duquel se fera la rotation initiale. On supposera, comme cela est permis, que la direction de la puissance est perpendiculaire au plan xy, et passe par l'axe des x à une distance h de l'origine, et que le centre d'inertie est à l'origine des coordonnées, qui se trouve par conséquent, théorème 91, être un des points de l'axe de rotation cherché. Tout cela posé, on a

$$\text{tang. } \theta = \frac{E \cos. n - F \sin. n}{A + B}$$

$$\text{tang. } n = \frac{E^2 - (A + B)(B + C)}{(A + B)D + EF},$$

force accélératrice angulaire naissante $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{h \sin. n \cos. \theta}{S(\rho^2 m)} P.$

Il faut observer que n a ici un signe différent de celui qu'on lui a donné art. 184 et suiv. *Voyez* la notation ci à côté.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			2.° La force accélératrice angulaire naissante.
P = puissance appliquée perpendiculairement au plan xy. p = la distance du point d'application à l'axe des x. θ = angle de l'axe de rotation et du plan xy. η = angle de la projection de l'axe de rotation sur le plan xy et de l'axe des x, l'axe de rotation étant supposé passer dans la région des x, z positives et y négatives. A, B, C, D, E et F ont la même signification qu'à l'art. 184. P = la puissance donnée dont la direction, perpendiculaire au plan xy, rencontre l'axe des x à une distance h de l'origine.		107. Le centre d'inertie d'un corps se trouvant à l'origine des coordonnées, et donnant au plan xy une position telle qu'on ait $S(xzm) = 0$, si l'on mène dans ce plan, à partir de l'origine, une ligne droite faisant avec l'axe des x un angle dont la tangente $= \frac{S(\rho^2 m)}{S(xym)}$, et qu'on applique deux puissances égales dont la valeur est absolument arbitraire, dirigées en sens contraire et perpendiculaires au plan xy, l'une à l'origine, l'autre à un point quelconque de la ligne dont il s'agit, la rotation initiale du corps se fera autour de l'axe des x. La force accélératrice angulaire naissante aura pour valeur $\frac{Pp}{S(\rho^2 m)}$.	147. Trouver deux forces dont l'une appliquée au centre d'inertie d'un corps de figure invariable et l'autre à un point convenable, donnent à ce corps une rotation initiale autour d'un axe libre donné de position; et déterminer la force accélératrice angulaire naissante. 148. Un corps de forme invariable et en repos étant sollicité par une puissance quelconque, et supposant qu'une puissance égale et dirigée en sens contraire, dans une parallèle à la direction de la première, soit appliquée au centre d'inertie, trouver l'axe autour duquel se fera la rotation initiale, et déterminer la vîtesse angulaire naissante.

213. QUELQUES considérations pourraient faire penser que l'axe de rotation doit être perpendiculaire au plan passant par le centre d'inertie et par la direction de la puissance, ou tout au moins se trouver dans le plan xy d'après la position que nous avons donnée à ce plan. Mais cette propriété n'appartient qu'à des cas particuliers, et lorsqu'une certaine équation de condition a lieu, équation qu'on trouve en faisant $\theta = 0$; ce qui, pour la valeur ci-dessus, donne tang. $n = \frac{E}{F}$; une autre valeur de tang. $\theta = \frac{(B + C)\cos. n + F \sin. n}{E}$ fournie par l'analyse du problème, donne tang. $n = - \frac{B + C}{D}$; d'où on tire ultérieurement, en égalant les deux valeurs,

$$ED + (B + C)F = 0,$$

équation de condition cherchée.

214. L'AXE dont nous venons de déterminer la position, a une propriété très-remarquable : il est, de tous ceux autour desquels on pourrait, en les fixant et au moyen de la puissance donnée, faire tourner le corps, celui pour qui la somme des forces vives élémentaires ou naissantes est un *minimum*. On déduit de cette propriété, une solution du problème plus simple que la précédente; et voici les valeurs qu'elle fournit, en supposant que les axes des coordonnées sont des axes principaux : et observant qu'ici la direction de la puissance sollicitante ne peut être supposée ni couper l'axe des x, ni perpendiculaire au plan x.

$$\text{tang. } n = \frac{a^2}{b^2} \cos. \delta$$

$$\text{tang. } \theta = \frac{a^2 b^2 (Y \cos. \delta - X \sin. \delta)}{Z c^2 \sqrt{\{a^4 \cos.^2 \delta + b^4 \sin.^2 \delta\}}} = \frac{(Y \cos. \delta - X \sin. \delta)\, b^2 \sin. n}{Z c^2 \cos. \delta} = \frac{(Y \cos. \delta - X \sin. \delta)\, a^2 \cos. n}{Z c^2 \sin. \delta},$$

force accélératrice angulaire naissante $\frac{d\nu}{dt} = \frac{h Z \sqrt{(a^4 \cos.^2 \delta + b^4 \sin.^2 \delta)}}{M a^2 b^2 \cos. \theta}$.

Nous verrons bientôt une autre solution, très-élégante, de ce problème.

215. APRÈS avoir considéré l'action d'une puissance sur un corps libre pris dans l'état de repos, il faut examiner les changemens produits

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			149. Dans l'hypothèse du problème précédent, déterminer les cas où l'axe de rotation se trouvera dans un plan perpendiculaire à la direction de la puissance.
θ et $\varkappa$ ont la même valeur et l'axe de rotation la même direction qu'à l'art. 212. δ = angle de l'axe des x et de la ligne passant par l'origine et par le point où la direction de la puissance rencontre le plan xy. X, Y et Z sont les composantes de la puissance sollicitante respectivement parallèles aux axes des x, y et z. M = la masse totale. Les momens d'inertie par rapport aux axes des x, y et z sont respectivement $a^2 m$, $b^2 M$ et $c^2 M$.		108. Une puissance étant appliquée à un corps en repos, l'axe passant par le centre d'inertie autour duquel se fera la rotation initiale, est celui par rapport auquel la somme des forces vives élémentaires ou naissantes est un *minimum*.	150. Résoudre le problème 148, en partant de la propriété énoncée dans le théorème 108.
			151. Un corps libre, de forme invariable, qui

dans la position d'un axe libre de rotation, et dans la vîtesse angulaire, lorsqu'un corps qui tourne autour de cet axe avec une vîtesse finie, reçoit l'impulsion instantanée d'une puissance donnée en quantité et en direction.

On connaît, par l'état de la question, la position de l'axe actuel de rotation; et par les formules des articles 212, 213 et 214, on peut déterminer l'axe autour duquel la puissance ferait tourner le corps si elle le prenait dans l'état de repos. De plus, les deux axes se coupent au centre d'inertie; on connaît donc et l'angle qu'ils forment entre eux, et la position du plan dans lequel ils se trouvent. C'est dans ce même plan que se trouvera le nouvel axe de rotation dont la direction fera, avec l'axe primitif, un angle qui a pour valeur

$$\omega = \frac{q\,dt \sin. s}{\gamma},$$

et la variation de la vîtesse angulaire sera

$$2\,q\,dt \cos. s.$$

216. Mais les puissances appliquées à un corps qui tourne autour d'un axe libre, avec une vîtesse finie, ne sont pas les seules causes qui dérangent la position de cet axe; les forces centrifuges produites par la vîtesse, peuvent seules en changer la position et la changent réellement, indépendamment de toute action extérieure, à moins, art. 198, que l'axe de rotation ne soit un axe principal.

Il est donc nécessaire de connaître les effets produits par les seules forces centrifuges; or, en réduisant leur action à celle de quatre puissances appliquées et perpendiculaires à l'axe actuel de rotation, dont deux perpendiculaires entre elles ont un point de leur direction au centre d'inertie, les deux autres, aussi perpendiculaires entre elles, agissent à une distance f du centre d'inertie, on trouve, en plaçant l'origine au centre d'inertie, et prenant les axes principaux pour axes des coordonnées, que ces deux dernières puissances ont pour valeur,

la première parallèle au plan xy . . . $\frac{\gamma^2}{f} \cos. \theta' \sin. n' \cos. n' (a^2 - b^2) M$;

la seconde agissant dans un plan perpendiculaire au plan xy . . . . . $\frac{\gamma^2}{f} \sin. \theta' \cos. \theta' (a^2 \cos.^2 n' + b^2 \sin.^2 n' - c^2) M$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
ω = variation angulaire de la position de l'axe de rotation dans le plan qui passe par les axes de rotation actuelle et virtuelle. s = angle formé par les deux axes de rotation actuelle et virtuelle. $2q$ = force accélératrice angulaire virtuelle par rapport à l'axe autour duquel la puissance commencerait à faire tourner le corps s'il était en repos.			tourne avec une vitesse angulaire finie autour d'un axe passant par son centre d'inertie, étant, à un instant déterminé, sollicité par une force donnée, qui, si le corps était en repos, le ferait tourner autour d'un autre axe passant aussi par le centre d'inertie, trouver le changement momentanée qui se produit dans la position du premier axe et dans le mouvement de rotation.
θ' = angle de l'axe de rotation actuel et du plan xy. n' = angle de l'axe des x et de la projection sur le plan xy de l'axe actuel de rotation qui est dirigée dans la région des x, y et z positives. M = la masse du corps.			152. Un corps tournant avec une vîtesse angulaire finie autour d'un axe libre dont la position est donnée par rapport aux axes principaux qui se coupent au centre d'inertie, déterminer les forces qui, en vertu de cette seule vîtesse angulaire, tendent à changer la position de l'axe actuel de rotation.
$a^2 M$, $b^2 M$ et $c^2 M$ sont les momens d'inertie autour des axes des x, des y et des z.			

217. Ces deux forces connues, pour connaître autour de quel axe elles feraient tourner le corps si elles le prenaient dans l'état de repos, on appliquera à leur résultante les formules de l'art. 214, déduites de la propriété que la somme des forces vives naissantes, autour de cet axe, doit être un *minimum ;* et comme cette résultante est dirigée perpendiculairement et appliquée à une ligne (l'axe actuel de rotation) passant par l'origine, et dont la position est donnée par les angles θ' et η', il faut introduire ces angles dans les formules afin d'avoir les positions respectives des axes actuel et virtuel. On trouve en conséquence, les axes des coordonnées étant les mêmes que dans l'article précédent,

$$\text{tang.}\ \eta = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{(a^2 - c^2)\cos.\eta'}{(b^2 - c^2)\sin.\eta'}$$

$$\text{tang.}\ \theta = \frac{\sin.\eta'\cos.\theta'\sin.\eta\,(a^2 - b^2)\,b^2}{c^2\,(a^2 - c^2)\sin.\theta'};$$

et la vîtesse angulaire naissante qui aurait lieu autour de l'axe dont on vient de déterminer la position

$$\frac{d\varsigma}{dt} = \frac{\varsigma^2\,(a^2 - b^2)\sin.\eta'\cos.\eta'\cos.^2\theta'}{c^2\sin.\theta}.$$

On ne donne ici qu'une valeur des quantités η, θ et $\frac{d\varsigma}{dt}$; mais l'analyse du problème en fournit plusieurs autres, qui ont des formes plus ou moins simples et commodes pour le calcul.

Si on substitue aux angles θ' et η' les angles α', β' et γ' formés par la même ligne, respectivement avec les axes des x, y, et z, et qu'on fasse

$$\Omega = \sqrt{[a^4 b^4 (a^2 - b^2)\cos.^2\alpha'\cos.^2\beta' + a^4 c^4 (a^2 - c^2)\cos.^2\alpha'\cos.^2\gamma' + b^4 c^4 (b^2 - c^2)\cos.^2\beta'\cos.^2\gamma']},$$

on aura

$$\text{tang.}\,\eta = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{(a^2 - c^2)\cos.\alpha'}{(b^2 - c^2)\cos.\beta'}$$

$$\sin.\ \theta = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)\cos.\alpha'\cos.\beta'}{\Omega},$$

ou

$$\text{tang.}\ \theta = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)\cos.\alpha'\cos.\beta'}{c^2\cos.\gamma'\sqrt{[a^4 (a^2 - c^2)^2\cos.^2\alpha' + b^4 (b^2 - c^2)\cos.^2\beta']}}$$

$$\frac{d\varsigma}{dt} = \frac{\varsigma^2\,\Omega}{a^2 b^2 c^2};$$

et en substituant aux angles η et θ les angles α, β, γ avec les axes

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
θ = l'angle formé par le plan xy et par l'axe autour duquel des puissances équivalentes aux forces centrifuges feront tourner le corps dans le premier instant de leur action, la vîtesse initiale étant nulle. u = l'angle formé par l'axe des x et par la projection sur le plan xy de l'axe ci-dessus mentionné. a, b et c ont la même signification qu'à l'art. 216.			153. Étant données par la solution du problème précédent, les résultantes des efforts produits sur l'axe actuel de rotation par les forces centrifuges, trouver autour de quel axe des puissances représentées par ces efforts, commenceraient à faire tourner le système, si elles agissaient sur lui avant qu'il eût aucun mouvement. Trouver en outre la force accélératrice angulaire naissante qui aurait lieu dans cette hypothèse.

des x, y et z, on a

$$\cos.\alpha = \frac{b^2c^2(b^2-c^2)\cos.\beta'\cos.\gamma'}{\Omega}$$

$$\cos.\beta = \frac{-a^2c^2(a^2-c^2)\cos.\alpha'\cos.\gamma'}{\Omega}$$

$$\cos.\gamma = \frac{a^2b^2(a^2-b^2)\cos.\alpha'\cos.\beta'}{\Omega}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{-\vartheta(a^2-c^2)\cos.\alpha'\cos.\gamma'}{b^2\cos.\beta}.$$

218. La connaissance de l'effet que des puissances équivalentes aux forces centrifuges produiraient sur un corps en repos, fournit le moyen de déterminer l'effet qu'elles produisent effectivement tant sur la position de l'axe de rotation, que sur la vîtesse angulaire. Imaginant une sphère dont le centre d'inertie, qui est en même temps l'origine des coordonnées, soit le centre, et faisant passer un grand cercle par l'axe des z et l'axe de rotation actuel, le grand cercle dans lequel se trouvera l'axe de rotation varié, fera avec le premier un angle dont la tangente sera

n.° 1 . . . $\frac{c^2\cos.\gamma'\{a^2(a^2-c^2)\cos.^2\alpha'+b^2(b^2-c^2)\cos.^2\beta'\}}{(a^2-b^2)\cos.\alpha'\cos.\beta'\{a^2b^2-(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos.^2\gamma'\}}$;

la variation de l'angle formé par l'axe des x et par la projection de l'axe de rotation actuelle sur le plan xy, sera

n.° 2 . . . $\frac{\vartheta dt}{2a^2b^2}\cdot\frac{\cos.\gamma'}{\sin.^2\gamma'}\cdot\{a^2(a^2-c^2)\cos.^2\alpha'+b^2(b^2-c^2)\cos.^2\beta'\}$;

la variation de l'angle formé par l'axe de rotation actuelle et par le plan xy, sera

n.° 3 . . . $\frac{\vartheta dt}{2a^2b^2c^2}\cdot\frac{\cos.\alpha'\cos.\beta'}{\sin.\gamma'}\cdot(a^2-b^2)\{a^2b^2-(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos.^2\gamma'\}$;

et la variation de la vîtesse angulaire sera

n.° 4 . . . $\frac{\vartheta^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)\cos.\alpha'\cos.\beta'\cos.\gamma'}{a^2b^2c^2}dt$.

219. Quels que soient maintenant l'espèce et le nombre des puissances qui sollicitent un corps en mouvement autour d'un axe libre, on a pour chacune de ces puissances en particulier, quantité correspondante à celle *n.° 1* de l'article précédent,

$$\frac{\sin.(n+n')}{\sin.\gamma'\,\text{tang.}\,\theta-\cos.\gamma'\cos.(n+n')},$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
α', β' et γ' sont les angles formés par l'axe de rotation actuelle et par les axes des x, y et z.			154. Un corps qui n'est soumis à l'action d'aucune puissance, tournant avec une vîtesse angulaire finie autour d'un axe libre quelconque qui passe par son centre d'inertie, et qui n'est point un axe principal, trouver la variation qui résulte des forces centrifuges, tant dans la position de l'axe de rotation que dans la vîtesse angulaire.
Les quantités angulaires accentuées se rapportent à			155. Un corps étant en mouvement autour d'un axe libre quelconque, trouver les variations produites tant dans la position de l'axe de ro-

variation correspondante à celle *n.°* 2 de l'article précédent,

$$\frac{q\,dt}{\aleph} \cdot \frac{\sin.(\eta + \eta')\cos.\theta}{\sin.\gamma'};$$

variation correspondante à celle *n.°* 3,

$$\frac{q\,dt}{\aleph}\{\sin.\gamma'\sin.\theta - \cos.\gamma'\cos.\theta\cos.(\eta + \eta')\};$$

variation correspondante à celle *n.°* 4,

$$2\,q\,dt\,\{\sin.\gamma'\cos.\theta\cos.(\eta + \eta') + \cos.\gamma'\sin.\theta\}.$$

Substituant dans ces expressions les valeurs de θ' et de η' qui sont données dès qu'on connaît la position de l'axe autour duquel se ferait la rotation initiale, si la puissance attaquait le corps dans l'état de repos, on aura les variations en quantités toutes connues; on fera les sommes des variations de même espèce (celles de différentes espèces étant indépendantes), et on aura les variations totales.

220. Les formules données depuis l'article 183, renferment tout ce qui est nécessaire pour déduire de la connaissance des puissances qui agissent sur un système libre, les diverses circonstances de son mouvement, et réciproquement; celles qu'on pourrait y ajouter pour calculer les changemens instantanées de situation d'un corps, résultant des changemens de position de l'axe libre de rotation et de la variation de la vîtesse angulaire, sont une affaire de pure géométrie; en sorte qu'au moyen de la théorie précédente, la solution de différens cas du problème général du mouvement d'un corps ne dépend plus que de la géométrie et du calcul intégral. Cependant la marche que nous avons suivie, n'est pas celle qui conduit le plus directement au but; et *Euler*, après avoir, dans sa Mécanique des corps durs, analysé avec beaucoup de détail les questions que nous venons de traiter, et plusieurs autres qui y sont relatives, reprend le problème en entier, dans son quinzième livre, où il expose, avec une clarté, une élégance et une généralité qui ne laissent rien à desirer, toute la doctrine du mouvement d'un corps sollicité par des puissances quelconques. Je donnerai bientôt le résultat de la théorie consignée dans ce quinzième livre, qui est vraiment un chef-d'œuvre d'analyse mécanique; mais à l'exemple d'*Euler* qui lui-même n'a envisagé le problème sous le point de vue le plus général, qu'après avoir

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
l'axe de rotation actuel, et les mêmes quantités non accentuées se rapportent à l'axe autour duquel la puissance qu'on considère, commencerait à faire tourner le corps si elle lui était appliquée dans l'état de repos ; le tout en conservant les significations données à α, β, γ, $\varkappa$ et θ dans les articles précédens.			tation, que dans la vîtesse angulaire en vertu de toutes les causes, de quelque espèce qu'elles soient, qui peuvent produire ces variations.

traité séparément et, pour ainsi dire, épuisé toutes les questions particulières qui y conduisent, j'ai cru devoir commencer par ces questions particulières qui présentent tout ce qui est relatif aux efforts que supporte un axe quelconque, aux conditions nécessaires pour qu'il n'en supporte aucun, aux changemens produits dans la position d'un axe libre de rotation et dans la vîtesse angulaire, par toutes les causes qui peuvent influer sur le mouvement, &c. Les solutions de ces questions particulières sont faciles à concevoir, sur-tout pour les jeunes gens qui ont fait des études de stéréotomie; et elles n'ont d'embarrassant que la longueur des calculs. Le problème général ne présente ensuite aucune difficulté; je vais en donner deux solutions, dont la première a l'avantage de ne pas exiger qu'on connaisse d'avance la théorie des axes principaux. On trouvera à la fin de l'Hydrostatique, une application importante qu'on en a faite aux oscillations des corps flottans.

221. Quels que soient le mouvement actuel d'un corps et les puissances qui le sollicitent, les sommes des forces motrices qui ont effectivement lieu, sont, en rapportant l'origine des coordonnées x', y' et z' à un point fixe,

$$S(\frac{d^2 x'}{dt^2}\, m),\quad S(\frac{d^2 y'}{dt^2}\, m),\quad S(\frac{d^2 z'}{dt^2}\, m).$$

Or, les sommes des forces motrices imprimées parallélement aux mêmes axes étant X, Y et Z; si, d'après le théorème 87, on décompose chaque force motrice imprimée à chaque molécule, en deux, dont l'une soit celle qui aura effectivement lieu, on trouvera que les six équations d'équilibre de l'article 136 doivent s'appliquer aux forces

$$X, -S(\frac{d^2 x'}{dt^2} m),\qquad Y, -S(\frac{d^2 y'}{dt^2} m),\qquad Z, -S(\frac{d^2 z'}{dt^2} m);$$

ce qui donne

$$X - S(\frac{d^2 x'}{dt^2} m) = 0;\ Y - S(\frac{d^2 y'}{dt^2} m) = 0,\ Z - S(\frac{d^2 z'}{dt^2} m) = 0$$

$$(Yz') - (Zy') = S(\frac{d^2 y'}{dt^2} z'm) - S(\frac{d^2 z'}{dt^2} y'm)$$

$$(Xz') - (Zx') = S(\frac{d^2 x'}{dt^2} z'm) - S(\frac{d^2 z'}{dt^2} x'm)$$

$$(Xy') - (Yx') = S(\frac{d^2 x'}{dt^2} y'm) - S(\frac{d^2 y'}{dt^2} x'm).$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
x', y' et z' coordonnées rapportées à un point fixe qui déterminent au bout du temps t la position d'une molécule quelconque m du corps. Les expressions de la forme (Xz'), $(Xz_{\prime\prime})$, &c., indiquent les sommes des momens par rapport aux axes des x', y', z', et des $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$, prises dans la même acception qu'à l'art. 149. x, y et z sont les coordonnées du centre d'inertie, rapportées au même point fixe que x', y' et z'. $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$ sont les coordonnées d'un point quelconque, rapportées aux axes passant par le centre d'inertie. p = le poids absolu de la molécule m à la surface de la terre. P = le poids absolu de la masse entière M. g = la force accélératrice de la pesanteur.			156. Un corps qui a un mouvement actuel étant sollicité par des puissances quelconques, trouver les équations différentielles du mouvement, en rapportant l'origine des coordonnées à un point fixe.

Les intégrales doivent être prises dans toute l'étendue du système.

222. Faisons passer par le centre d'inertie, des axes, mobiles avec le corps, mais constamment parallèles aux axes fixes auxquels se rapportent les équations ci-dessus, on aura

$$x' = x + x_{\prime\prime},\ y' = y + y_{\prime\prime},\ z' = z + z_{\prime\prime};$$

ensuite x, y et z, qui se rapportent à un point unique du système, seront constantes relativement au signe S qui ne porte que sur les quantités variant d'un point à l'autre. Ces considérations, jointes aux propriétés du centre d'inertie, exposées art. 159, donnent les équations suivantes, qui remplacent celles de l'art. 221;

$$\left.\begin{array}{l} X - \frac{d^2 x}{dt^2} M = 0,\ Y - \frac{d^2 y}{dt^2} M = 0,\ Z - \frac{d^2 z}{dt^2} M = 0 \\ (Yz_{\prime\prime}) - (Zy_{\prime\prime}) = S\left(\frac{d^2 y_{\prime\prime}}{dt^2} z_{\prime\prime} m\right) - S\left(\frac{d^2 z_{\prime\prime}}{dt^2} y_{\prime\prime} m\right) \\ (Xz_{\prime\prime}) - (Zx_{\prime\prime}) = S\left(\frac{d^2 x_{\prime\prime}}{dt^2} z_{\prime\prime} m\right) - S\left(\frac{d^2 z_{\prime\prime}}{dt^2} x_{\prime\prime} m\right) \\ (Xy_{\prime\prime}) - (Yx_{\prime\prime}) = S\left(\frac{d^2 x_{\prime\prime}}{dt^2} y_{\prime\prime} m\right) - S\left(\frac{d^2 y_{\prime\prime}}{dt^2} x_{\prime\prime} m\right). \end{array}\right\}$$

On peut à M et m substituer $\frac{P}{g}$ et $\frac{p}{g}$.

Les trois dernières peuvent se mettre sous la forme

$$(Yz_{\prime\prime}) - (Zy_{\prime\prime}) = \frac{S\{p.d(z_{\prime\prime} dy_{\prime\prime} - y_{\prime\prime} dz_{\prime\prime})\}}{g\,dt^2}$$

$$(Xz_{\prime\prime}) - (Zx_{\prime\prime}) = \frac{S\{p.d(z_{\prime\prime} dx_{\prime\prime} - x_{\prime\prime} dz_{\prime\prime})\}}{g\,dt^2}.$$

$$(Xy_{\prime\prime}) - (Yz_{\prime\prime}) = \frac{S\{p.d(y_{\prime\prime} dx_{\prime\prime} - x_{\prime\prime} dy_{\prime\prime})\}}{g\,dt^2}.$$

223. Ces équations ont l'avantage important d'offrir séparément ce qui est relatif au mouvement du centre d'inertie, et ce qui concerne le mouvement de rotation autour de ce centre. On voit par les trois premières, que le centre d'inertie se meut de la même manière que si toute la masse du corps y était concentrée et que toutes les puissances y fussent appliquées parallélement à leurs directions; par les trois dernières, que la rotation autour du centre d'inertie a lieu comme si ce centre était fixe.

224. Il peut être et il est même souvent nécessaire d'introduire dans les équations du mouvement, les angles décrits par le corps autour du centre d'inertie; nous allons, en conséquence, donner des formules

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		109. L'indépendance du mouvement de translation du centre d'inertie et de celui de rotation autour de ce centre, énoncée dans le théorème 91, se déduit immédiatement des équations générales du mouvement, données par la solution du problème 156.	157. Résoudre le même problème en rapportant l'origine des coordonnées à trois axes passant par le centre d'inertie, et par conséquent mobiles avec le corps, mais constamment parallèles à trois lignes de position fixe; ces dernières lignes étant les axes des coordonnées du centre d'inertie.

pour exprimer en fonctions de ces angles les coordonnées $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$ rapportées au centre d'inertie.

On suppose qu'un point du système dont les coordonnées primitives sont $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ et $z_{\prime}$, décrive,

1.° Un angle σ autour de l'axe des z, en s'éloignant du plan xz, et s'approchant du plan yz;

2.° A partir de l'extrémité de l'arc précédent, un second angle φ autour de l'axe des x, en s'éloignant du plan xy, et s'approchant du plan xz;

3.° A partir de l'extrémité de l'arc précédent, un troisième angle τ autour de l'axe des y, en s'éloignant du plan xy, et s'approchant du plan yz;

Et soient $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$ les coordonnées du point après qu'il a décrit ces trois angles, on aura

$$x_{\prime\prime} = \cos.\tau\,(x_{\prime}\cos.\sigma - y_{\prime}\sin.\sigma) - \sin.\tau\,\{z_{\prime}\cos.\varphi + \sin.\varphi\,(x_{\prime}\sin.\sigma + y_{\prime}\cos.\sigma)\}$$

$$y_{\prime\prime} = \cos.\varphi\,(x_{\prime}\sin.\sigma + y_{\prime}\cos.\sigma) - z_{\prime}\sin.\varphi$$

$$z_{\prime\prime} = \sin.\tau\,(x_{\prime}\cos.\sigma - y_{\prime}\sin.\sigma) + \cos.\tau\,\{z_{\prime}\cos.\varphi + \sin.\varphi\,(x_{\prime}\sin.\sigma + y_{\prime}\cos.\sigma)\}.$$

225. Il faut remarquer lorsqu'on aura à différencier ces valeurs de $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$, qu'on fera une opération de calcul qui se rapporte au chemin que fait une même molécule en passant d'un point qui a $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$ pour coordonnées, au point infiniment voisin; on ne doit donc dans cette opération de calcul, considérer comme variables que les arcs σ, φ et τ que décrit cette molécule, et on doit traiter comme constantes les coordonnées $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$ de son point de départ. Mais lorsque ces quantités ainsi différenciées sont sous le signe S, ce signe indique qu'il faut prendre, dans toute l'étendue du corps, la somme de toutes les quantités pareilles, c'est-à-dire qu'en nommant Ω', Ω'', Ω''', &c., ce que les différenciations précédentes ont donné, respectivement, pour les molécules n.° 1, n.° 2, n.° 3, &c., le signe S indique qu'il faut prendre la somme $\Omega' + \Omega'' + \Omega''' +$ &c. Or, dans le passage de Ω' à Ω'', σ, φ et τ, et les quantités qui en dépendent, ne varient point, puisqu'elles sont les mêmes pour chaque molécule; mais $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ et $z_{\prime}$ varient, parce qu'elles dépendent des positions respectives de ces molécules: c'est donc $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ et $z_{\prime}$ qu'il faut considérer comme variables dans

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.

l'opération de calcul qu'indique le signe S, sous lequel σ, ϕ, τ et les quantités qui en dépendent doivent être regardées comme constantes.

226. Les formules de l'art. 222 fournissent le moyen de substituer aux coordonnées des points du système, les angles décrits autour des axes coordonnés ; mais les trois rotations autour de ces axes se composent en une seule autour d'un axe unique. Il est extrêmement utile pour l'application de la dynamique à des questions très-importantes, d'introduire dans les équations du mouvement la vîtesse angulaire autour de cet axe unique et les angles qu'il forme avec les axes coordonnés : c'est cette introduction qui caractérise la théorie et donne lieu à la seconde méthode dont j'ai parlé art. 220 ; je pense qu'on me saura quelque gré de présenter ici le tableau des formules qu'elle fournit.

Le premier problème à résoudre est celui de décomposer la vîtesse d'un point qui tourne autour d'une ligne passant par l'origine, en trois vîtesses parallèles respectivement aux axes coordonnés ; on a

$$\left.\begin{aligned} u &= \vartheta(z \sin.\eta \cos.\theta - y \sin.\theta) \\ v &= \vartheta(x \sin.\theta - z \cos.\eta \cos.\theta) \\ w &= \vartheta(y \cos.\eta \cos\theta - x \sin.\eta \cos.\theta) \end{aligned}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{aligned} u &= \vartheta(z \cos.\beta - y \cos.\gamma) \\ v &= \vartheta(x \cos.\gamma - z \cos.\alpha) \\ w &= \vartheta(y \cos.\alpha - x \cos.\beta). \end{aligned}\right.$$

227. Différenciant ces équations, on a

$$du = d\vartheta(z \cos.\beta - y \cos.\gamma) - \vartheta(z\,d\beta \sin.\beta - y\,d\gamma \sin.\gamma) + \vartheta(dz \cos.\beta - dy \cos.\gamma)$$
$$dv = d\vartheta(x \cos.\gamma - z \cos.\alpha) - \vartheta(x\,d\gamma \sin.\gamma - z\,d\alpha \sin.\alpha) + \vartheta(dx \cos.\gamma - dz \cos.\alpha)$$
$$dw = d\vartheta(y \cos.\alpha - x \cos.\beta) - \vartheta(y\,d\alpha \sin.\alpha - x\,d\beta \sin.\beta) + \vartheta(dy \cos.\alpha - dx \cos.\beta).$$

Mais on a

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Substituant dans ces équations les valeurs de u, v et w, tirées des équations de l'article précédent, il vient

$$dx = \vartheta dt\,(z \cos.\beta - y \cos.\gamma)$$
$$dy = \vartheta dt\,(x \cos.\gamma - z \cos.\alpha)$$
$$dz = \vartheta dt\,(y \cos.\alpha - x \cos.\beta);$$

et ces valeurs de dx, dy et dz substituées dans celles de du, dv et dw donnent

$$du = d\vartheta(z \cos.\beta - y \cos.\gamma) - \vartheta(z\,d\beta \sin.\beta - y\,d\gamma \sin.\gamma) + \vartheta^2 dt\,(y \cos.\alpha \cos.\beta + z \cos.\alpha \cos.\gamma - x \sin.^2\alpha)$$
$$dv = d\vartheta(x \cos.\gamma - z \cos.\alpha) - \vartheta(x\,d\gamma \sin.\gamma - z\,d\alpha \sin.\alpha) + \vartheta^2 dt\,(z \cos.\beta \cos.\gamma + x \cos.\alpha \cos.\beta - y \sin.^2\beta)$$
$$dw = d\vartheta(y \cos.\alpha - x \cos.\beta) - \vartheta(y\,d\alpha \sin.\alpha - x\,d\beta \sin.\beta) + \vartheta^2 dt\,(x \cos.\alpha \cos.\gamma + y \cos.\beta \cos.\gamma - z \sin.^2\gamma).$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
u, v et w sont les vîtesses du point du système qui a x, y et z pour coordonnées, vîtesses prises dans des sens respectivement parallèles à x, y et z. υ = la vîtesse angulaire du système. θ = angle de l'axe de rotation et du plan xy. η = angle de l'axe des x et de la projection de l'axe de rotation sur le plan xy. α, β et γ sont respectivement les angles de l'axe de rotation et des axes des x, y et x.			158. Trouver les équations du mouvement d'un corps de figure invariable, sollicité par des puissances quelconques, sous une forme telle qu'elles renferment la vîtesse angulaire et les angles formés par l'axe de rotation et les axes coordonnés ; ce qui exige qu'on résolve les problèmes suivans. 159. Décomposer la vîtesse avec laquelle un point matériel tourne autour d'un axe de position connue, en trois vîtesses dont les directions soient respectivement parallèles aux trois axes coordonnés. 160. Exprimer les variations instantanées de ces vîtesses en fonction des coordonnées du point matériel, de la vîtesse angulaire et de sa différentielle, des angles formés par l'axe de rotation et les axes coordonnés, et des différentielles de ces angles.

228. Telles sont les valeurs des variations effectives que subissent les vîtesses parallèles à x, y et z d'un point matériel tournant avec une vîtesse angulaire ϑ autour d'un axe passant par l'origine, variations correspondantes à celles $d\vartheta$, $d\alpha$, $d\beta$, et $d\gamma$ des quantités ϑ, α, β et γ. Ces variations du, dv et dw multipliées chacune par $\frac{1}{dt}\,m$ donneront les forces motrices effectives qui animent la molécule m parallélement aux axes coordonnés ; sommant ces forces motrices dans toute l'étendue du système, et faisant

$$S\left(\frac{du}{dt}\,m\right) = X,\quad S\left(\frac{dv}{dt}\,m\right) = Y,\quad S\left(\frac{dw}{dt}\,m\right) = Z,$$

on a

$$X\,dt = S\left\{m\left[d\vartheta\,(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) - \vartheta\,(z\,d\beta\sin.\beta - y\,d\gamma\sin.\gamma) + \vartheta^2\,dt\,(y\cos.\alpha\cos.\beta + z\cos.\alpha\cos.\gamma - x\sin.^2\alpha)\right]\right\}$$
$$Y\,dt = S\left\{m\left[d\vartheta\,(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) - \vartheta\,(x\,d\gamma\sin.\gamma - z\,d\alpha\sin.\alpha) + \vartheta^2\,dt\,(z\cos.\beta\cos.\gamma + x\cos.\alpha\cos.\beta - y\sin.^2\beta)\right]\right\}$$
$$Z\,dt = S\left\{m\left[d\vartheta\,(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) - \vartheta\,(y\,d\alpha\sin.\alpha - x\,d\beta\sin.\beta) + \vartheta^2\,dt\,(x\cos.\alpha\cos.\gamma + y\cos.\beta\cos.\gamma - z\sin.^2\gamma)\right]\right\}.$$

229. Les quantités t, ϑ, α, β, γ, et leurs différentielles sont constantes par rapport au signe S; ainsi les seconds membres des équations précédentes ne renferment, par rapport à ce signe S, que des quantités de la forme $AS(xm)$, $BS(ym)$, $CS(zm)$; mais dès que l'on suppose que l'origine des coordonnées est le centre d'inertie du système, ces sommes doivent être nulles, art. 159 ; et on a dans ce cas,

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0;$$

résultat conforme à ce qui a été dit art. 206 et théorème 106.

230. Mais nous savons, art. 209, que, quoique les sommes des forces motrices qui ont effectivement lieu soient nulles, les momens de ces forces ne le sont pas; prenant donc les momens de $\frac{du}{dt}\,m$, $\frac{dv}{dt}\,m$ et $\frac{dw}{dt}\,m$, on a

$$\text{Momens autour des axes}\begin{cases}\text{des } x \ldots \frac{m}{dt}\,(y\,dw - z\,dv)\\ \text{des } y \ldots \frac{m}{dt}\,(z\,du - x\,dw),\\ \text{des } z \ldots \frac{m}{dt}\,(x\,dv - y\,du),\end{cases}$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
m = la masse du point matériel du système auquel se rapportent les vîtesses u, v et w. X, Y et Z sont les sommes des forces motrices effectives qui ont lieu dans le système parallélement aux axes des x, des y et des z.			161. Trouver les sommes des forces motrices effectives qui ont lieu dans un système animé de puissances quelconques et tournant autour d'un axe libre ; ces sommes étant prises parallélement aux trois axes coordonnés.
On suppose que l'origine des coordonnées est au centre d'inertie du corps.		110. Chacune des trois sommes dont il est question dans le problème 160, est nulle par elle-même, dès qu'on suppose que l'origine des coordonnées est au centre d'inertie du corps.	
			162. Trouver les momens de la force motrice effective qui anime un point matériel d'un système sollicité par des puissances quelconques, et tournant autour d'un axe libre qui passe par son centre d'inertie ; ces momens étant pris par rapport à chacun des axes coordonnés.

ou en substituant pour du, dv et dw leurs valeurs tirées des équations de l'art. 227.

Momens de la force motrice effective qui anime un point matériel quelconque du système, ces momens étant pris par rapport aux axes..

des x...

$$d\vartheta\,\{(y^2+z^2)\cos.\alpha - xy\cos.\beta - xz\cos.\gamma\}\,\frac{m}{dt}$$
$$-\vartheta\,\{(y^2+z^2)\,d\alpha\sin.\alpha - xy\,d\beta\sin.\beta - xz\,d\gamma\sin.\gamma\}\,\frac{m}{dt}$$
$$+\vartheta^2 dt\,\{({}^2y - z^2)\cos.\beta\cos.\gamma + xy\cos.\alpha\cos.\gamma - xz\cos.\alpha\cos.\beta - yz(\sin.^2\gamma - \sin.^2\beta)\}\,\frac{m}{dt}$$

des y...

$$d\vartheta\,\{(x^2+z^2)\cos.\beta - yz\cos.\gamma - xy\cos.\alpha\}\,\frac{m}{dt}$$
$$-\vartheta\,\{(x^2+z^2)\,d\beta\sin.\beta - yz\,d\gamma\sin.\gamma - xy\,d\alpha\sin.\alpha\}\,\frac{m}{dt}$$
$$+\vartheta^2 dt\,\{(z^2 - x^2)\cos.\alpha\cos.\gamma + yz\cos.\alpha\cos.\beta - xy\cos.\beta\cos.\gamma - xz(\sin.^2\alpha - \sin.^2\gamma)\}\,\frac{m}{dt}$$

des z...

$$d\vartheta\,\{(x^2+y^2)\cos.\gamma - xz\cos.\alpha - yz\cos.\beta\}\,\frac{m}{dt}$$
$$-\vartheta\,\{(x^2+y^2)\,d\gamma\sin.\gamma - xz\,d\alpha\sin.\alpha - yz\,d\beta\sin.\beta\}\,\frac{m}{dt}$$
$$+\vartheta^2 dt\,\{(x^2 - y^2)\cos.\alpha\cos.\beta + xz\cos.\beta\cos.\gamma - yz\cos.\alpha\cos.\gamma - xy(\sin.^2\beta - \sin.^2\alpha)\}\,\frac{m}{dt}.$$

231. Il faut maintenant prendre la somme de ces momens dans toute l'étendue du système ; mais pour simplifier les expressions, nous ajouterons à la condition énoncée dans l'art. 229, que l'origine des coordonnées est un centre d'inertie, celle que les axes coordonnés sont des axes principaux. Cette dernière condition donne

$$S(xym) = 0, \quad S(xzm) = 0, \quad S(yzm) = 0;$$

et les momens précédens ont pour valeur, en observant que t, ϑ, α, β et γ sont constans par rapport au signe S,

Sommes des momens des forces motrices effectives, en supposant que les axes des coordonnées soient principaux, ces sommes étant prises par rapport aux axes...........

des x...

$$\frac{1}{dt}(d\vartheta\cos.\alpha - \vartheta\,d\alpha\sin.\alpha + \vartheta^2 dt\cos.\beta\cos.\gamma).S(my^2)$$
$$+\frac{1}{dt}(d\vartheta\cos.\alpha - \vartheta\,d\alpha\sin.\alpha - \vartheta^2 dt\cos.\beta\cos.\gamma).S(mz^2)$$

des y...

$$\frac{1}{dt}(d\vartheta\cos.\beta - \vartheta\,d\beta\sin.\beta + \vartheta^2 dt\cos.\alpha\cos.\gamma)\;S(mx^2)$$
$$+\frac{1}{dt}(d\vartheta\cos.\beta - \vartheta\,d\beta\sin.\beta - \vartheta^2 dt\cos.\alpha\cos.\gamma)\;S(mz^2)$$

des z...

$$\frac{1}{dt}(d\vartheta\cos.\gamma - \vartheta\,d\gamma\sin.\gamma + \vartheta^2 dt\cos.\alpha\cos.\beta)\;S(mx^2)$$
$$\frac{1}{dt}(d\vartheta\cos.\gamma - \vartheta\,d\gamma\sin.\gamma - \vartheta^2 dt\cos.\alpha\cos.\beta)\;S(my^2).$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
Les axes des coordonnées sont supposés se couper au centre d'inertie et être des axes principaux.			163. Trouver, dans toute l'étendue du système, les sommes de ces momens des forces motrices effectives, en supposant que les axes coordonnés sont des axes principaux.

232. Ces expressions peuvent se simplifier encore en employant la notation de l'art. 192, et faisant
$S(mx^2) = A = \frac{1}{2}M(b^2 + c^2 - a^2)$, $S(my^2) = B = \frac{1}{2}M(a^2 + c^2 - b^2)$, $S(mz^2) = C = \frac{1}{2}M(a^2 + b^2 - c^2)$,
elles deviennent respectivement,

Sommes des momens des forces motrices effectives, en supposant que les axes des coordonnées soient principaux, par rapport aux axes...........

des $x \ldots \frac{1}{dt}\{a^2(d\theta\cos.\alpha - \theta d\alpha\sin.\alpha) + \theta^2(c^2 - b^2)dt\cos.\beta\cos.\gamma\}M$

des $y \ldots \frac{1}{dt}\{b^2(d\theta\cos.\beta - \theta d\beta\sin.\beta) + \theta^2(a^2 - c^2)dt\cos.\alpha\cos.\gamma\}M$

des $z \ldots \frac{1}{dt}\{c^2(d\theta\cos.\gamma - \theta d\gamma\sin.\gamma) + \theta^2(b^2 - a^2)dt\cos.\alpha\cos.\beta\}M.$

233. Si l'on suppose que la position de l'axe de rotation par rapport aux axes coordonnés et la vîtesse angulaire sont invariables, on a pour les valeurs des momens,

Sommes des momens des forces motrices effectives, dans le cas où la position de l'axe de rotation et la vîtesse angulaire sont invariables, ces momens étant pris par rapport aux axes..............................

des $x \ldots \{\theta^2(c^2 - b^2)\cos.\beta\cos.\gamma\}M$

des $y \ldots \{\theta^2(a^2 - c^2)\cos.\alpha\cos.\gamma\}M$

des $z \ldots \{\theta^2(b^2 - a^2)\cos.\alpha\cos.\beta\}M.$

234. Et si cet axe de rotation est celui des x, des y ou des z, on a respectivement pour les sommes des momens des forces motrices effectives,

$$\frac{d\theta}{ds}Ma^2, \quad \frac{d\theta}{dt}Mb^2, \quad \frac{d\theta}{dt}Mc^2.$$

235. Lorsqu'on a les valeurs des momens des forces motrices effectives, il est fort aisé de poser les équations du mouvement de rotation, qui ne sont autre chose, art. 221, que l'énonciation de l'égalité entre les momens dont on vient de parler et ceux des forces motrices effectives.

Soient donc

Sommes des momens par rapport à l'axe... des x.......P ; des y......Q ; des z......R.

on aura, en égalant respectivement P, Q et R aux expressions de l'art. 232;

$$P = \frac{1}{dt}\{a^2(d\theta\cos.\alpha - \theta d\alpha\sin.\alpha) + \theta^2(c^2 - b^2)dt\cos.\beta\cos.\gamma\}M$$

$$Q = \frac{1}{dt}\{b^2(d\theta\cos.\beta - \theta d\beta\sin.\beta) + \theta^2(a^2 - c^2)dt\cos.\alpha\cos.\gamma\}M$$

$$R = \frac{1}{dt}\{c^2(d\theta\cos.\gamma - \theta d\gamma\sin.\gamma) + \theta^2(b^2 - a^2)dt\cos.\alpha\cos.\beta\}M,$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
M = masse totale des corps. Ma^2, Mb^2 et Mc^2 sont les momens d'inertie pris respectivement par rapport aux axes des x, des y et des z, on a $Ma^2 = B + C$ $Mb^2 = A + C$ $Mc^2 = A + B$.			164. Trouver ce que deviennent ces sommes, 1.° Lorsque la position de l'axe de rotation par rapport aux axes coordonnés, et la vîtesse angulaire, sont supposées invariables; 2.° Lorsque l'axe de rotation est l'un des trois axes des x, des y ou des z.
			165. Trouver les trois équations du mouvement de rotation d'un corps, sollicité par des puissances quelconques, autour d'un axe libre qui passe par le centre d'inertie de ce corps.
P, Q et R sont les sommes des momens des forces motrices imprimées, sommes prises respectivement par rapport aux axes des x, des y et des z.			

équations qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{P\,dt}{a^2 M} = d\varkappa \cos.\alpha - \varkappa\, d\alpha \sin.\alpha + \frac{c^2 - b^2}{a^2}\varkappa^2\, dt \cos.\beta \cos.\gamma$$

$$\frac{Q\,dt}{b^2 M} = d\varkappa \cos.\beta - \varkappa\, d\beta \sin.\beta + \frac{a^2 - c^2}{b^2}\varkappa^2\, dt \cos.\alpha \cos.\gamma$$

$$\frac{R\,dt}{c^2 M} = d\varkappa \cos.\gamma - \varkappa\, d\gamma \sin.\gamma + \frac{b^2 - a^2}{c^2}\varkappa^2\, dt \cos.\alpha \cos.\beta.$$

Telles sont les équations qui, en les supposant intégrées, et en y joignant l'équation $\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1$, donneront les valeurs de $\varkappa$, α, β et γ en fonctions de t, P, Q et R, et des constantes M, a, b et c. L'intégration ne peut s'effectuer que dans quelques cas particuliers; mais les équations différentielles n'en fournissent pas moins plusieurs conséquences générales et importantes.

D'abord, multipliant respectivement ces trois équations par $\cos.\alpha$, $\cos\beta$, $\cos.\gamma$, et les ajoutant, on a

$$d\varkappa = \frac{(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{a^2 b^2 c^2}\varkappa^2\, dt \cos.\alpha \cos.\beta \cos.\gamma + \frac{dt}{M}\left(\frac{P\cos.\alpha}{a^2} + \frac{Q\cos.\beta}{b^2} + \frac{R\cos.\gamma}{c^2}\right).$$

236. Cette équation, employée à éliminer $d\varkappa$, donne

$$d\alpha \sin.\alpha = \frac{c^2 - b^2}{a^2}\varkappa^2\, dt \cos.\beta\cos.\gamma\left(1 + \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{b^2 c^2}\cos.^2\alpha\right) + \frac{dt}{M}\left(\frac{Q\cos.\alpha\cos.\beta}{b^2} + \frac{R\cos.\alpha\cos.\gamma}{c^2} - \frac{P\sin.^2\alpha}{a^2}\right)$$

$$d\beta \sin.\beta = \frac{a^2 - c^2}{b^2}\varkappa^2\, dt \cos.\alpha\cos.\gamma\left(1 + \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{a^2 c^2}\cos.^2\beta\right) + \frac{dt}{M}\left(\frac{R\cos.\beta\cos.\gamma}{a^2} + \frac{P\cos.\beta\cos.\alpha}{c^2} - \frac{Q\sin.^2\beta}{b^2}\right)$$

$$d\gamma \sin.\gamma = \frac{b^2 - a^2}{c^2}\varkappa^2\, dt \cos.\alpha\cos.\beta\left(1 + \frac{(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2 b^2}\cos.^2\gamma\right) + \frac{dt}{M}\left(\frac{P\cos.\gamma\cos.\alpha}{a^2} + \frac{Q\cos.\gamma\cos.\beta}{b^2} - \frac{R\sin.^2\gamma}{c^2}\right).$$

237. On peut faire une autre combinaison des équations de l'art. 235, en les multipliant respectivement par $a^2\cos.\alpha$, $b^2\cos.\beta$, $c^2\cos.\gamma$, et les ajoutant ensemble; ce qui donne

$$\frac{dt}{M}(P\cos.\alpha + Q\cos.\beta + R\cos.\gamma) = \begin{cases} d\varkappa(a^2\cos.^2\alpha + b^2\cos.^2\beta + c^2\cos.^2\gamma) \\ -\varkappa(a^2\, d\alpha \sin.\alpha\cos.\alpha + b^2\, d\beta\sin.\beta\cos.\beta + c^2\, d\gamma\sin.\gamma\cos.\gamma); \end{cases}$$

multipliant cette équation par $2M\varkappa$, et intégrant, on a

$$M\varkappa^2(a^2\cos.^2\alpha + b^2\cos.^2\beta + c^2\cos.^2\gamma) = 2\int[\varkappa\, dt(P\cos.\alpha + Q\cos. + \beta + R\cos.\gamma)] + \text{constante};$$

on démontre aisément que le premier membre de cette équation donne la somme des forces vives de tout le système.

238. Les équations des trois articles précédens se simplifient beaucoup, lorsque le système, mu en vertu d'une impulsion primitive, n'est soumis

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			166. Trouver la somme des forces vives d'un système de forme invariable, qui tourne autour d'un axe libre passant par son centre d'inertie. 167. Trouver les équations du mouvement de rotation dans le cas où le

à l'action d'aucune puissance extérieure; on a dans ce cas,

$$\frac{d\aleph}{\aleph^2} = \frac{(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{a^2 b^2 c^2} dt \cos.\alpha \cos.\beta \cos.\gamma$$

$$d\alpha \sin.\alpha = \frac{c^2 - a^2}{a^2} . \aleph\, dt . \cos.\beta \cos.\gamma \left(1 + \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - a^2)}{b^2 c^2} \cos.^2 \alpha\right)$$

$$d\beta \sin.\beta = \frac{a^2 - c^2}{b^2} \aleph\, dt . \cos.\alpha \cos.\gamma \left(1 + \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{a^2 c^2} \cos.^2 \beta\right)$$

$$d\gamma \sin.\gamma = \frac{b^2 - a^2}{c^2} \aleph\, dt . \cos.\alpha \cos.\beta \left(1 + \frac{(c^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2 b^2} \cos.^2 \gamma\right).$$

Somme des forces vives dues au seul mouvement de rotation. $\Big\} = M\aleph^2(a^2 \cos.^2\alpha + b^2 \cos.^2\beta + c^2 \cos.^2\gamma) =$ constante.

239. Les équations de l'art. 236 fournissent le moyen de résoudre une question intéressante; savoir : étant données les sommes des momens P, Q, R des forces motrices imprimées aux divers points du système, momens pris par rapport aux axes principaux qui passent par le centre d'inertie, trouver, par rapport aux mêmes axes, la position de l'axe de rotation dans le premier instant de l'action des puissances sur le corps supposé en repos; on a pour cette détermination

$$\cos.\alpha = \frac{P}{a^2 \sqrt{\left(\frac{P^2}{a^4} + \frac{Q^2}{b^4} + \frac{R^2}{c^4}\right)}}$$

$$\cos.\beta = \frac{Q}{b^2 \sqrt{\left(\frac{P^2}{a^4} + \frac{Q^2}{b^4} + \frac{R^2}{c^4}\right)}}$$

$$\cos.\gamma = \frac{R}{c^2 \sqrt{\left(\frac{P^2}{a^4} + \frac{Q^2}{b^4} + \frac{R^2}{c^4}\right)}}.$$

240. On peut joindre à ces valeurs celle de la force angulaire naissante, qui est

$$\frac{d\aleph}{dt} = \frac{1}{M} \sqrt{\left(\frac{P^2}{a^4} + \frac{Q^2}{b^4} + \frac{R^2}{c^4}\right)}.$$

241. Les équations de l'art. 235 peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{P\,dt}{a^2 M} = d(\aleph \cos.\alpha) + \frac{c^2 - b^2}{a^2} \aleph^2 dt \cos.\beta \cos.\gamma,$$

$$\frac{Q\,dt}{b^2 M} = d(\aleph \cos.\beta) + \frac{a^2 - c^2}{b^2} \aleph^2 dt \cos.\alpha \cos.\gamma,$$

$$\frac{R\,dt}{c^2 M} = d(\aleph \cos.\gamma) + \frac{b^2 - a^2}{c^2} \aleph^2 dt \cos.\alpha \cos.\beta.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			système, mu en vertu d'une impulsion primitive, n'est sollicité par aucune puissance extérieure.
			168. Étant données les sommes des momens des forces motrices imprimées au système, momens pris par rapport aux axes principaux qui passent par le centre d'inertie, trouver, par rapport aux mêmes axes, la position d. l'axe de rotation, dans le premier instant de l'action des puissances sur le corps supposé en repos.
			169. Un corps mu en vertu d'une impulsion primitive, n'étant sollicité par aucune puissance extérieure, trouver les équations différentielles qui

242. Supposant que le système abandonné à une impulsion primitive, n'est sollicité par aucune puissance extérieure, ces équations deviennent

$$d(\vartheta \cos. \alpha) = - \frac{c^2 - b^2}{a^2} \vartheta^2 dt \cos. \beta \cos. \gamma$$

$$d(\vartheta \cos. \beta) = - \frac{a^2 - c^2}{b^2} \vartheta^2 dt \cos. \alpha \cos. \gamma$$

$$d(\vartheta \cos. \gamma) = - \frac{b^2 - a^2}{c^2} \vartheta^2 dt \cos. \alpha \cos. \beta.$$

243. Les formules des articles précédens conduisent à la connaissance de la position de l'axe de rotation par rapport aux axes principaux passant par le centre d'inertie; mais comme ces axes se meuvent avec le corps, il est nécessaire d'avoir des formules au moyen desquelles on puisse à chaque instant déterminer la position absolue du corps dans l'espace. Pour cela, profitant de l'indépendance des mouvemens de translation et de rotation, imaginons que le centre d'inertie est fixé au centre d'une sphère immobile dont le rayon = 1; sur cette sphère prenons un grand cercle de position donnée, et sur ce grand cercle un point de position pareillement donnée : la position du corps par rapport à ce grand cercle sera déterminée quand on connaîtra les angles l, m, n, λ, μ et ν; et on a pour cette détermination, 1.° les équations

$$(1) \ldots \begin{cases} dl \sin. l = \vartheta dt(\cos. \beta \cos. n - \cos. \gamma \cos. m) \\ dm \sin. m = \vartheta dt(\cos. \gamma \cos. l - \cos. \alpha \cos. n) \\ dn \sin. n = \vartheta dt(\cos. \alpha \cos. m - \cos. \beta \cos. l), \end{cases}$$

qui lient les angles l, m et n aux quantités ϑ, α, β et γ; il suffira de connaître deux de ces angles, parce qu'on a entre l, m et n la relation

$$\cos.^2 l + \cos.^2 m + \cos.^2 n = 1;$$

2.° Les équations

$$(2) \ldots \begin{cases} d\lambda \sin.^2 l = - \vartheta dt \cos. \beta \cos. m + \cos. \gamma \cos. n) \\ d\mu \sin.^2 m = - \vartheta dt \cos. \gamma \cos. n + \cos. \alpha \cos. l) \\ d\nu \sin.^2 n = - \vartheta dt \cos. \alpha \cos. l + \cos. \beta \cos. m), \end{cases}$$

qui lient les angles λ, μ et ν aux quantités connues ou déterminées par les équations précédentes; mais si l'on a un seul de ces angles, on pourra

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			se rapportent 1.° à son mouvement de rotation;
			2.° A la position absolue des axes principaux dans l'espace, à une époque quelconque, lorsque celle de l'axe de rotation par rapport aux axes principaux qui passent par le centre d'inertie, et la vîtesse angulaire, sont données.
Désignant par CO la circonférence du grand cercle de position donnée et invariable; Et par IR le rayon mené du centre de la sphère, ou du centre d'inertie du corps, au point de position donnée pris sur CO; l, m et n sont les arcs de grand cercle qui mesurent les angles respectivement formés par le rayon IR et par les axes des x, des y et des z, axes qui sont principaux et qui passent par le centre d'inertie; λ, μ et ν sont respectivement les angles formés par le grand cercle CO et par les arcs l, m et n; α, β et γ sont, comme à l'ordinaire, les angles formés par l'axe de rotation et par les axes des x, des y et des z respectivement.			

calculer les deux autres par les équations

$$\text{tang.}(\mu - \lambda) = \frac{\cos. n}{\cos. m \cos. l}$$
$$\text{tang.}(\nu - \mu) = \frac{\cos. l}{\cos. n \cos. m}$$
$$\text{tang.}(\nu - \lambda) = \frac{\cos. m}{\cos. n \cos. l}.$$

244. Les trois équations de l'art. 242 conduisent aux suivantes;

$$\frac{d(\gamma \cos. \alpha)^2}{2A_{,}} = \frac{d(\gamma \cos. \beta)^2}{2B_{,}} = \frac{d(\gamma \cos. \gamma)^2}{2C_{,}} = \gamma^3 \cos. \alpha \cos. \beta \cos. \gamma dt = du;$$

d'où on déduit, en intégrant,

$$\gamma^2 \cos.^2 \alpha = 2A_{,} u + K_{,};\ \gamma^2 \cos.^2 \beta = 2B_{,} u + K_{,,};\ \gamma^2 \cos.^2 \gamma = 2C_{,} u + K_{,,,},$$

et de là la relation entre u et t, qui peut, dans tous les cas, se calculer par les quadratures des courbes :

$$dt = \frac{du}{\sqrt{[(2A_{,}u + K_{,})(2B_{,}u + K_{,,})(2C_{,}u + K_{,,,})]}}.$$

Il faut observer qu'on a en même temps $u = 0$ et $t = 0$; et lorsque u sera connu en t, on aura γ, α, β et γ pour une époque quelconque, au moyen des équations

$$\gamma = \sqrt{[2(A_{,} + B_{,} + C_{,})u + K_{,} + K_{,,} + K_{,,,})]}$$

$$\cos. \alpha = \frac{\sqrt{(2A_{,}u + K_{,})}}{\gamma};\ \cos. \beta = \frac{\sqrt{(2B_{,}u + K_{,,})}}{\gamma};\ \cos \gamma = \frac{\sqrt{(2C_{,}u + K_{,,,})}}{\gamma}.$$

245. On a donc très-simplement, dans le cas où le corps, livré à une impulsion primitive, n'est sollicité par aucune puissance, la vîtesse angulaire et la position de l'axe de rotation, par rapport aux axes principaux, à tous les instans; et il ne reste plus qu'à déterminer la position absolue des axes principaux dans l'espace, ou à trouver des équations finies entre t et l, m, n, λ, μ et ν. La solution de ce problème dépend des équations différentielles de l'art. 243, qu'on peut combiner avec celles déduites des équations de l'art. 242. Les difficultés de l'intégration sont telles, qu'*Euler* les avait d'abord crues au-dessus des forces de l'analyse; mais il est heureusement parvenu à les surmonter dans un mémoire publié parmi ceux de l'académie de Berlin, année 1758. Les formules auxquelles il est parvenu, se présentent d'abord sous une forme très-compliquée, quoiqu'elles soient parfaitement symétriques : il les

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
u est une variable introduite dans le calcul, avec la condition que $\frac{du}{dt} = \mathfrak{z}^3 \cos. \alpha \cos. \beta \cos. \gamma$. $K_{,}$, $K_{,,}$ et $K_{,,,}$ sont les constantes arbitraires introduites par l'intégration, ou les valeurs initiales de $\mathfrak{z}^2 \cos.^2 \alpha$, $\mathfrak{z}^2 \cos.^2 \beta$ et $\mathfrak{z}^2 \cos.^2 \gamma$. $A_{,} = \frac{bb - cc}{aa}$ $B_{,} = \frac{cc - aa}{bb}$ $C_{,} = \frac{aa - bb}{cc}$. $G_{,} = K_{,} a^4 + K_{,,} b^4 + K_{,,,} c^4$.			170. Un corps étant toujours supposé se mouvoir uniquement en vertu d'une impulsion primitive, trouver les équations finies ou intégrables, par les quadratures, qui donnent tant les circonstances de son mouvement de rotation, que sa position absolue dans l'espace, au bout d'un temps quelconque.

a considérablement simplifiées, sans nuire à la généralité de la solution, en observant que la position initiale des axes principaux sur lesquels se comptent les x, y et z, étant donnée, et la position de la ligne qui, passant par l'origine des x, y et z, fait avec ces mêmes axes des angles respectifs l, m, n, étant arbitraire, on était le maître de se donner les valeurs initiales de ces angles l, m et n (ou seulement de deux d'entre eux, à cause de l'équation $\cos.^2 l + \cos.^2 m + \cos.^2 n = 1$), et de choisir ces valeurs de manière à satisfaire à certaines conditions. Or, en supposant qu'au commencement du mouvement on a

$$\cos. l = a^2 \sqrt{\left(\frac{K_{,}}{G_{,}}\right)}; \quad \cos. m = b^2 \sqrt{\left(\frac{K_{,,}}{G_{,}}\right)}; \quad \cos. n = c^2 \sqrt{\left(\frac{K_{,,,}}{G_{,}}\right)},$$

les formules compliquées dont j'ai parlé précédemment, se réduisent à un seul terme; et on a pour un instant quelconque,

$$\cos. l = \frac{a^2 \gamma \cos. \alpha}{\sqrt{(G_{,})}} \quad \cos. m = \frac{b^2 \gamma \cos. \beta}{\sqrt{(G_{,})}} \quad \cos. n = \frac{c^2 \gamma \cos. \gamma}{\sqrt{(G_{,})}};$$

ce qui, je le répète, ne limite en aucune manière la généralité de la solution, vu qu'il n'y a aucun cas où on ne puisse se donner les valeurs initiales ci-dessus de l, m et n; et, d'après cela, il est inutile de rapporter ici les équations dont *Euler* a déduit celles-ci, qui peuvent d'ailleurs s'obtenir immédiatement. Je ferai voir par la suite la liaison de ces résultats avec la belle théorie des *plans invariables* de *Laplace*, que j'ai citée dans la note de l'art. 148.

246. Il ne reste plus qu'à déterminer les angles λ, μ, ν; et au moyen des trois dernières équations de l'art. 243, un seul de ces angles suffit pour avoir la connaissance des deux autres. On se bornera donc à calculer séparément l'angle λ par l'équation

$$d\lambda = \frac{-du\,(bbK_{,,} + ccK_{,,,} - 2aaA_{,}u)\sqrt{(G_{,})}}{(K_{,,}b^4 + K_{,,,}c^4 - 2A_{,}a^4u)\sqrt{[(K_{,} - 2A_{,}u)(K_{,,} - 2B_{,}u)(K_{,,,} - 2C_{,}u)]}},$$

qui, au moyen de l'équation de l'art. 244, entre u et t, donnera λ pour une valeur quelconque t. Ainsi le problème du mouvement d'un corps de figure quelconque, qui, livré à une impulsion primitive, n'est sollicité par aucune puissance, se trouve complétement résolu dans toutes ses parties.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.

TROISIÈME PARTIE.

MÉCANIQUE DES CORPS FLUIDES.

PREMIÈRE SECTION.

HYDROSTATIQUE.

247. Les propriétés des fluides tels que l'eau, l'air, &c., qui tombent immédiatement sous les sens, font parfaitement distinguer ces corps de tous ceux qu'on nomme *solides* : leur classement parmi les diverses substances est une des premières opérations dont le sentiment et le besoin rendent l'entendement capable; mais les caractères sur lesquels ce classement est fondé, ne peuvent pas servir de base à une théorie mathématique. Aussi les géomètres qui se sont occupés de l'équilibre et du mouvement des fluides, ont-ils pris pour base de leurs recherches la propriété suivante, qui, à l'avantage de caractériser essentiellement la *fluidité*, réunit celui de fournir une équation.

On suppose qu'un fluide est renfermé dans un vase immobile et, si l'on veut, de forme invariable : un piston adapté à une ouverture cylindrique pratiquée à ce vase, est sollicité par une puissance, la seule dont le fluide éprouve l'action; et on a, entre cette puissance et la pression totale qu'éprouve une surface plane de grandeur arbitraire, prise ou sur la paroi intérieure du vase, ou dans une partie quelconque de la masse fluide, l'équation suivante :

$$A\pi = a\Pi.$$

Toute substance pour laquelle cette équation a lieu, est fluide, et réciproquement.

248. Les fluides nous offrent, à un degré sensiblement parfait, l'incompressibilité et l'élasticité. On sait, par expérience, qu'une masse d'eau qui conserve une température constante, ne peut pas, quelque compression qu'on lui fasse éprouver, diminuer de volume; il en est

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	51. De la propriété qui doit être considérée comme le caractère des fluides, lorsqu'il s'agit d'établir une théorie mathématique de leur équilibre et de leur mouvement.		
Π = puissance qui agit sur le piston. A = surface de la base du piston. π = pression totale d'une surface plane a, prise en un endroit quelconque de la masse fluide.		111. Toute substance pour laquelle l'équation $A\pi = a\Pi$ a lieu, dans le sens de l'art. 224, est fluide, et réciproquement.	171. Trouver l'équation de condition qui caractérise la fluidité d'un corps.
	52. Des fluides incompressibles.	112. Les substances connues qui jouissent éminemment de la propriété précédente, ou ne diminuent	

de même de tous les fluides classés sous la dénomination de *liquides*; et cette propriété leur fait donner le nom d'*incompressibles*.

L'air, au contraire, et les fluides classés sous la dénomination d'*aériformes*, occupent un espace d'autant plus petit que les puissances qui les compriment sont plus grandes, et se rétablissent dans leurs volumes primitifs, lorsque les forces qui ont fait changer ces volumes cessent leur action. Cette propriété, qui leur fait donner le nom de *fluides élastiques*, est énoncée par l'équation suivante :

$$p = \frac{V}{v} P, \text{ ou } Kp = kP.$$

249. Ce qu'on a dit dans l'article précédent, suppose la température constante; mais on sait, par expérience, que le volume des fluides, tant incompressibles qu'élastiques, augmente ou diminue avec leur température, indépendamment des forces comprimantes. J'ai trouvé, en appliquant le calcul à plusieurs expériences *, que la loi de la dilatation des fluides élastiques pouvait être exprimée par une équation de la forme

$$V = \{\mu(\rho^x - 1) + 1\} U;$$

d'où on déduit les équations

$$V_{(x+\Delta x)} - V_{(x)} = U\mu(\rho^{\Delta x} - 1)\rho^x$$

$$R = \frac{V_{(x+\Delta x)} - V_{(x)}}{V} = \frac{\mu(\rho^{\Delta x} - 1)\rho^x}{\mu(\rho^x - 1) + 1}$$

La première donne l'augmentation de volume correspondante à une augmentation donnée de température ; la seconde donne la *dilatabilité* ou le rapport entre l'augmentation de volume et le volume augmenté.

$$x = \frac{\log.\left(\frac{V}{U} + \mu - 1\right) - \log.\mu}{\log.\rho}$$

Déduite de la valeur de V.

$$x = \frac{\log.(RV) - \log.\{U\mu(\rho^{\Delta x} - 1)\}}{\log.\rho}$$

Déduite de valeur de $V_{(x+\Delta x)} - V_{(x)}$.

$$x = \frac{\log.R(1 - \mu) - \log.\{\mu(\rho^{\Delta x} - R)\}}{\log.\rho}$$

Déduite de la valeur de R.

250. La quantité μU mesure la plus petite diminution de volume que le refroidissement puisse opérer, c'est celle répondant à $x = -\infty$.

* *Voyez* mon Mémoire sur la dilatabilité des fluides élastiques, n.° 2 du Journal de l'École polytechnique.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
La masse étant supposée la même, $V =$ volume sous la pression donnée P, et avec la densité K. $v =$ volume sous la pression quelconque p, et avec la densité k. Les pressions p et P sont rapportées à l'unité de surface. $U =$ le volume primitif à zéro degré de température. $x =$ le nombre de degrés de température. $V = V_{(x)} =$ le volume à la température x. $V_{(x + \Delta x)} =$ le volume à la température $x + \Delta x$. μ et ρ sont deux constantes qui se déterminent par expérience; on peut voir dans le mémoire cité, article 226, leurs valeurs pour sept fluides élastiques; savoir, l'air atmosphérique, et les gaz hydrogène, nitreux, carbonique, oxigène, ammoniac et azoth. $R =$ la *dilatabilité* $= \dfrac{V_{(x+\Delta x)} - V_{(x)}}{V}$. Les volumes U, $V_{(x)}$, et $V_{(x + \Delta x)}$ sont supposés répondre à la même masse et soumis à la même pression.	53. Des fluides élastiques et de ce qu'on entend par la *dilatabilité* de ces fluides, lorsque leur volume varie par le changement de température.	point sensiblement de volume, quelle que soit la force qui les comprime, ou diminuent de volume (dans certaines limites) par l'effet des forces comprimantes, suivant la loi indiquée par l'une ou l'autre des équations $p = \dfrac{V}{v} P,$ $p = \dfrac{k}{K} P.$ 113. Les fluides élastiques auxquels les équations de l'art. 226 peuvent s'appliquer, sont d'au-	172. Trouver l'équation de condition qui caractérise la compressibilité et l'élasticité d'un fluide. 173. Trouver la loi de la dilatation, par le calorique, des fluides élastiques et celle de leur *dilatabilité*. 174. Étant donné le volume ou la dilatabilité d'un fluide élastique, ainsi que la masse et la pression, trouver la température correspondante. 175. Trouver la plus grande compression dont un fluide élastique soit susceptible par le refroidissement.

On voit de plus par la valeur de R, que les fluides élastiques auxquels les équations précédentes peuvent s'appliquer, sont d'autant plus *dilatables* qu'ils sont plus dilatés.

251. La diminution de volume d'un fluide élastique en raison des poids comprimans, ne peut point être regardée comme absolument indépendante de sa densité actuelle, et il y a certainement des densités extrêmes et finies qui répondent, d'une part, à une compression nulle, et, de l'autre, à une compression telle, qu'en l'augmentant on n'augmente point la densité.

Les fluides liquides ne doivent pareillement être considérés que comme sensiblement incompressibles, c'est-à-dire, tels que les plus grandes forces avec lesquelles on a pu les presser, n'ont fait apercevoir aucune diminution de volume.

La nature n'a donc pas mis entre les fluides incompressibles et les fluides compressibles et élastiques une ligne de démarcation absolue, et il est aisé d'imaginer une infinité de relations entre la pression et la densité, qui, liant par la loi de continuité ces deux états extrêmes des fluides, mesurent ou indiquent les nuances intermédiaires.

Parmi ces relations, on peut remarquer celle qu'établit l'équation suivante ;

$$p = n(q - k)\sqrt{\left(\frac{q-k}{K-q}\right)},$$

qui, indistinctement applicable aux fluides élastiques et aux fluides incompressibles, appartient aux premiers, tant qu'on a $\frac{k}{K} < 1$, et approche d'autant plus d'appartenir aux seconds, que $\frac{k}{K}$ diffère moins de l'unité.

En effet, qu'on imagine une courbe dont q soit l'abscisse et p l'ordonnée ; toutes les valeurs possibles de p, depuis zéro jusqu'à l'infini positif, se trouveront dans l'intervalle compris entre $q = k$, qui donne $p = 0$, et $q = K$ qui donne $p = \infty$; par-tout, hors de cet intervalle, p sera imaginaire. Le passage de $p = 0$ à $p = \infty$, sera d'autant plus rapide, que les points limites où $q = k$ et où $q = K$, seront plus rapprochés ; et cependant, quelle que soit leur distance, p n'en aura pas moins toutes les valeurs positives : si cette distance est supposée nulle, la courbe se confondra avec son asymptote, et dégénérera en une ligne droite perpendiculaire à l'axe ; c'est-à-dire que toutes les pressions possibles p correspondront à une densité unique ou constante. Ce cas *limite* est celui des fluides parfaitement *incompressibles* ; et les diverses valeurs, finie ou infinie, qu'on peut donner à l'intervalle entre les points où $q = k$ et où $q = K$, repondent aux différens degrés d'*élasticité*. Cette construction résout très-bien la difficulté qui pourrait naître de l'hypothèse $k = K$, hypothèse qui semble, au premier coup-d'œil, n'admettre d'autre valeur réelle de p que celle $p = 0$,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		tant plus dilatables, qu'ils sont déjà dilatés.	176. Trouver une équation entre la pression et la densité qui lie par la loi de continuité la propriété de l'incompressibilité des fluides liquides, et celle de la compressibilité des fluides élastiques, et soit ainsi indistinctement applicable à deux espèces de corps.
k = la densité correspondante à une pression nulle. K = la plus grande densité que le fluide soit susceptible d'acquérir. n = un coèfficient constant. q = la densité sous la pression p.			

252. Un fluide incompressible étant renfermé dans un vase de forme invariable, percé d'un nombre quelconque d'ouvertures cylindriques fermées par autant de pistons auxquels sont appliquées des puissances proportionnelles aux ouvertures, et par conséquent en équilibre, si un ou plusieurs de ces pistons viennent à s'enfoncer respectivement de $p_{\prime}$, $p_{\prime\prime}$, $p_{\prime\prime\prime}$, &c., les autres pistons s'élèveront, et on aura, en vertu de l'incompressibilité du fluide,

$$A_{\prime}p_{\prime} + A_{\prime\prime}p_{\prime\prime} + A_{\prime\prime\prime}p_{\prime\prime\prime} + \&c. = 0,$$

ou parce que $A_{\prime} : A_{\prime\prime} : A_{\prime\prime\prime}$ &c. : : $P_{\prime} : P_{\prime\prime} : P_{\prime\prime\prime}$ &c.

$$P_{\prime}p_{\prime} + P_{\prime\prime}p_{\prime\prime} + P_{\prime\prime\prime}p_{\prime\prime\prime} + \&c. = 0,$$

en donnant le signe convenable, ce qui, pour ce cas, est l'équation fournie par le principe des vîtesses virtuelles.

253. On verra par la suite, que ce principe a lieu dans tous les cas d'équilibre des fluides tant incompressibles qu'élastiques ; mais, en attendant, on peut se servir du résultat précédent pour expliquer les conclusions, paradoxales en apparence, que fournit l'équation de l'article 247, et faire voir que l'amplification indéfinie d'effort qu'on obtient par le moyen des fluides, est un phénomène de même espèce que ceux offerts par les machines ordinaires, telles que le levier, la vis, &c.

L'équation de l'article cité, qui donne $\pi = \frac{a}{A}\,\Pi$, suggère l'idée d'une machine dans laquelle on peut, par l'intermède d'un fluide incompressible, produire avec une puissance P d'une petitesse arbitraire, une pression p aussi grande qu'on voudra. L'idée de cette presse, qui a été récemment donnée comme nouvelle, est toute entière dans le Traité de l'équilibre des liqueurs de *Pascal.*

254. La formule $\pi = \frac{a}{A}\,\Pi$ donne la pression absolue ou totale, qui a lieu sur une surface plane a, prise dans un endroit quelconque de la masse d'un fluide, élastique ou non, lorsqu'une autre surface plane A, prise aussi dans cette masse, éprouve une pression Π. Si le fluide est élastique, et qu'on connaisse son ressort, la pression rapportée à l'unité de surface étant, art. 248,

$$p = \frac{l}{K}\,P \text{ ou } p = \frac{V}{v}\,P \ldots \left\{ \begin{array}{l}\text{Les volumes } V \text{ et } v \text{ se rapportent à} \\ \text{une même masse.}\end{array}\right.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$A_{,}$, $A_{,,}$, $A_{,,,}$, &c., sont les ouvertures pratiquées au vase. $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$, &c., sont les puissances appliquées aux pistons qui forment ces ouvertures.		114. Le principe des vitesses virtuelles a lieu dans l'équilibre d'un nombre quelconque de puissances qui agissent sur un fluide incompressible, renfermé dans un vase de forme invariable, par l'intermède d'un nombre égal de pistons.	177. Construire une presse au moyen de laquelle on puisse, par l'intermède d'un fluide incompressible, produire, avec une puissance donnée, une pression aussi grande qu'on voudra. 178. Calculer la pression qu'un fluide incompressible non pesant, exerce sur une surface plane prise en un endroit quelque de sa masse, lorsqu'on connaît sa pression sur une aire plane donnée.

la connaissance de cette pression ne dépend que de celle de la densité k, lorsqu'on connaît la pression P correspondante à une densité particulière K, et a étant la surface dont on veut connaître la pression totale π, on a

$$\pi = \frac{ak}{K} P, \text{ ou } \pi = \frac{aV}{v} P \ldots$$

Les volumes V et v se rapportent à une même masse.

255. On peut substituer aux pressions p et P rapportées à l'unité de surface, les hauteurs h et H de deux prismes d'un même fluide qui auraient pour base l'unité de surface, et dont le poids mesurerait ces pressions ; par ce moyen, on obtient les équations

$$h = \frac{k}{K} H, \text{ ou } h = \frac{V}{v} H \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{ak}{K} H, \text{ ou } n = \frac{aV}{v} H \ldots\ldots\ldots$$

$$\pi = \frac{V}{v} aH.k'g = \frac{k}{K} aH.k'g \ldots$$

V et v se rapportent à une même masse du fluide dont on évalue la pression ; H et h sont les hauteurs de deux prismes du même ou d'un autre fluide dont la densité $= k'$, les poids de ces prismes mesurant les pressions, rapportées à l'unité de surface, qui correspondent aux densités k et K. On a de plus $n = ah$.

256. On a fait, dans les formules précédentes, abstraction de la température, ou plutôt on l'a supposée constante ; mais connaissant la pression d'une masse donnée de fluide élastique qui occupe un certain volume et qui est à une certaine température, il est bon de pouvoir en déduire la pression correspondante à un autre volume et à une autre température ; on a pour cela la formule

$$h = [(\rho^x - 1)\mu + 1] \frac{U}{v} H.$$

Pour connaître la pression qu'exerce la masse de fluide élevée de la température zéro à la température x, et renfermée de manière à ne pouvoir changer de volume, il faut faire $v = U$; ce qui donne

$$h = [(\rho^x - 1)\mu + 1] H.$$

Il paraît, d'après quelques expériences, que, dans ce dernier cas, le gaz azoth mis à la température de l'eau bouillante, exerce une pression égale à sept fois celle de l'atmosphère. Au surplus, ces équations et celles de l'article 249 résultent de l'application d'une méthode particulière d'interpolation à des expériences faites sur la dilatation des fluides élastiques. (*Voyez* le Mémoire cité, art. 249.)

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
π = pression totale sur la surface a.			Trouver la même chose pour un fluide élastique, lorsqu'on connaît le rapport de sa densité actuelle à la densité qui répond à une force élastique donnée.
H et h sont respectivement les hauteurs de deux prismes d'un même fluide, qui ont l'unité de surface pour base, et dont les poids mesurent les pressions rapportées à l'unité de surface d'une même masse de fluide élastique, occupant le volume V, sous la charge H et à la température zéro, et le volume v sous la charge h et à la température x. *Voyez*, pour le surplus de la notation, l'art. 249.			179. Connaissant la pression, rapportée à l'unité de surface, d'une masse donnée de fluide élastique, qui occupe un certain volume et qui est à une certaine température, trouver la pression que cette même masse exercerait si elle occupait un autre volume et qu'elle fût à une autre température.

257. Ce qui précède s'applique aux fluides élastiques qui conservent l'état gazeux sous toutes les températures (ou du moins à des températures très-inférieures à celle de la glace); mais les liquides vaporisés exercent des pressions qui, considérées quant à l'application qu'on en fait au mouvement de certaines machines, sont données par les seules températures. J'ai reconnu, en appliquant mes formules d'interpolation à des expériences très-bien faites, qu'on avait pour la vapeur de l'eau,

$$h = \mu_{\prime}\rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime}^{x}$$

et pour la vapeur de l'alkool,

$$h = \mu_{\prime}\rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime}^{x} + \mu_{\text{IV}}$$

Ces formules peuvent, pour la pratique, se réduire à
$h = \mu_{\prime\prime}(\rho_{\prime\prime}^{x} - \rho_{\prime\prime\prime}^{x})$ pour l'eau,
$h = \mu_{\prime}\rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime}^{x} + \mu_{\text{IV}}$ pour l'alkool.

258. Il paraît qu'en général la forme particulière de la fonction qui est la plus propre à représenter les phénomènes des fluides élastiques, considérés quant à leur dilatabilité et aux pressions qu'ils exercent à différentes températures, est

$$\mu_{\prime}\rho_{\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime}\rho_{\prime\prime}^{x} + \mu_{\prime\prime\prime}\rho_{\prime\prime\prime}^{x} + \&c.,$$

x étant la température; $\mu_{\prime}$, $\mu_{\prime\prime}$, &c., $\rho_{\prime}$, $\rho_{\prime\prime}$, &c., des constantes données par l'expérience.

259. Un fluide sans pesanteur, renfermé dans un vase où il est soumis à l'action d'une puissance qui agit sur lui par le moyen d'un piston adapté à un orifice pratiqué à ce vase, étant supposé en équilibre, un élément différentio-différentiel de surface courbe en contact avec ce fluide, éprouvera une pression

$$\pi = \frac{\omega}{A}\Pi.$$

260. Il est bon de donner la valeur de π en fonction des coordonnées de l'élément différentio-différentiel de la surface courbe, et de trouver celle de ses composantes parallèles aux axes. Je place ici, à cette occasion, quelques formules qui pourront être utiles en plusieurs circonstances.

L'équation du plan tangent est

$$z - z_{\prime} = \left(\frac{dz_{\prime}}{dx_{\prime}}\right)(x - x_{\prime}) + \left(\frac{dz_{\prime}}{dy_{\prime}}\right)(y - y_{\prime})$$

Les lignes $x - x_{\prime}$, $y - y_{\prime}$ et $z - z_{\prime}$ sont les trois coordonnées d'un point quelconque du plan tangent, en rapportant l'origine au point de contact.

NOTATION.

h = la hauteur d'un prisme de mercure qui a l'unité pour base, et dont le poids mesure la pression cherchée.

x = la température correspondante à la charge h.

Le mètre étant l'unité de longueur, et la température étant rapportée au thermomètre centigrade, on a

Pour l'eau,

$\rho_{,} = 1,136006.$

$\rho_{,,} = 1,038037.$

$\rho_{,,,} = 1,02$[illegible]$490.$

$\mu_{,} = -\ 0,000000196.$

$\mu_{,,} = 0,023403.$

$\mu_{,,,} = -\ 0,023403.$

Pour l'alkool.

$\rho_{,} = 1,090391.$

$\rho_{,,} = 1,045453.$

$\rho_{,,,} = 0,836030.$

$\mu_{,} = -\ 0,000058.$

$\mu_{,,} = +\ 0,024669.$

$\mu_{,,,} = +\ 0,005677.$

$\mu_{IV} = -\ 0,030288.$

ω = l'élément différentio-différentiel de la surface courbe pressée par le fluide.

π, Π et A ont la même signification qu'à l'art. 247.

$x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ sont les coordonnées de celui des élémens différentio-différentiels de la surface courbe dont on considère la pression, et auquel on suppose que se rapportent le plan tangent et la normale.

x, y et z sont les coordonnées d'un point quelconque du plan tangent.

DÉFINITIONS.

THÉORÈMES.

115.

La forme de la fonction la plus propre à représenter les phénomènes des fluides élastiques considérés quant à leur dilatabilité et aux pressions qu'ils exercent à différentes températures, est $\mu_{,}\rho_{,}^{x} + \mu_{,,}\rho_{,,}^{x} + \mu_{,,,}\rho_{,,,}^{x} +$ &c., x étant la température et $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$ &c., $\rho_{,}$, $\rho_{,,}$, &c., des constantes qui se déterminent par l'expérience.

PROBLÈMES.

180.

Trouver les formules au moyen desquelles on puisse calculer la pression ou la force expansive des vapeurs de l'eau et de l'alkool, leur température étant donnée.

181.

Trouver la pression d'un élément différentio-différentiel d'une surface en contact avec un fluide en équilibre, renfermé dans un vase, et sur lequel agit une puissance par l'intermède d'un piston adapté à un orifice pratiqué au vase.

182.

Trouver,

1.° L'équation du plan tangent d'une surface courbe.

ou $z = \left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)x + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)y - \left[\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)x_, + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)y_, - z_,\right]$.

Les équations des projections de la normale sont

our le plan...
- $xy \ldots \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)(x - x_,) - \left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)(y - y_,) = 0$
- $xz \ldots x - x_, + \left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)(z - z_,) = 0$
- $yz \ldots y - y_, + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)(z - z_,) = 0$

(Dont on peut rapporter l'origine au point de contact, en prenant $x - x_,$, $y - y_,$ et $z - z_,$ pour coordonnés.)

ou

$$y = \frac{\left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)}{\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)}x - \left\{\frac{\left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)}{\frac{dz_,}{dx_,}}x_, + y_,\right\}$$

$$z = \frac{-1}{\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)}x + \frac{1}{\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)}x_, + z_,$$

$$z = \frac{-1}{\left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)}y + \frac{1}{\left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)}y_, + z_,.$$

La perpendiculaire menée de l'origine sur le plan de contact, a pour longueur

$$\frac{\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)x_, + \left(\frac{dz_,}{dz_,}\right)y_, - z_,}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)^2 + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)^2\right]}},$$

et les coordonnées du point où cette perpendiculaire rencontre le plan de contact, sont

Parallélement

aux x . . . $$\frac{-\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)\left[\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)x_, + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)y_, - z_,\right]}{1 + \left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)^2 + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)^2}$$

aux y . . . $$\frac{-\left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)\left[\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)x_, + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)y_, - z_,\right]}{1 + \left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)^2 + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)^2}$$

aux z . . . $$\frac{+\left[\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)x_, + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)y_, - z_,\right]}{1 + \left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)^2 + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)^2}.$$

On a ensuite

{Cosinus de l'angle formé par la normale et par l'axe des x,} = {Cosinus de l'angle formé par le plan tangent et par le plan xz,} $$= -\frac{\left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz_,}{dx_,}\right)^2 + \left(\frac{dz_,}{dy_,}\right)^2\right]}}$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
x, y et z sont ici les coordonnées d'un point quelconque de la normale.			2.° Les équations de projection de la normale au point de contact.
			3.° La longueur de la perpendiculaire menée de l'origine sur le plan tangent.
			4.° Les coordonnées du point où cette perpendiculaire rencontre le plan tangent.
			5.° Les cosinus tant des angles formés par la normale et les axes coordonnés, que de ceux formés par le plan tangent et les plans coordonnés.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Cosinus de l'angle}\\ \text{formé par la normale et}\\ \text{par l'axe des } y.\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Cosinus de l'angle}\\ \text{formé par le plan tan-}\\ \text{gent et par le plan } xz.\end{array}\right\} = -\frac{\left(\frac{dz_{,}}{dy_{,}}\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz_{,}}{dx_{,}}\right)^2+\left(\frac{dz_{,}}{dy_{,}}\right)^2\right]}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Cosinus de l'angle}\\ \text{formé par la normale et}\\ \text{par l'axe des } z.\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Cosinus de l'angle}\\ \text{formé par le plan tan-}\\ \text{gent et par le plan } xy.\end{array}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz_{,}}{dx_{,}}\right)^2+\left(\frac{dz_{,}}{dy_{,}}\right)^2\right]}}.$$

261. Cela posé, l'élément différentio-différentiel ω étant supposé avoir pour projection, sur le plan xy, le parallélogramme élémentaire $dx_{,}\,dy_{,}$, nous aurons

$$\omega = dx_{,}\,dy_{,}\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz_{,}}{dx_{,}}\right)^2+\left(\frac{dz_{,}}{dy_{,}}\right)^2\right]}$$

ce qui donnera

$$\pi = \frac{\Pi}{A}\cdot dx_{,}\,dy_{,}\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz_{,}}{dx_{,}}\right)^2+\left(\frac{dz_{,}}{dy_{,}}\right)^2\right]}$$

Les valeurs de $\left(\frac{dz_{,}}{dx_{,}}\right)$ et $\left(\frac{dz_{,}}{dy_{,}}\right)$ se déduiront de l'équation donnée de la surface courbe.

expression qui, sommée dans l'étendue convenable, donnera la somme des pressions normales de tous les élémens d'une portion finie de surface courbe.

262. Les composantes de π, parallèles aux axes des coordonnées, sont

$$\text{Parallélement aux axes.}\left\{\begin{array}{l}\text{des } x\ldots\ \frac{-\Pi}{A}\left(\frac{dz_{,}}{dx_{,}}\right)dx_{,}\cdot dy_{,}\\[2mm] \text{des } y\ldots\ \frac{-\Pi}{A}\left(\frac{dz_{,}}{dy_{,}}\right)dy_{,}\cdot dx_{,}\\[2mm] \text{des } z\ldots\ \frac{\Pi}{A}\,dx_{,}\,dy_{,}\end{array}\right.$$

Les valeurs de $\left(\frac{dz_{,}}{dx_{,}}\right)$ et de $\left(\frac{dz_{,}}{dy_{,}}\right)$ se déduisent de l'équation donnée de la surface courbe.

et ces expressions, qui sont respectivement les produits de $\frac{\Pi}{A}$ par les surfaces des projections de l'élément ω sur les plans des yz, des xz et des xy, étant sommées dans l'étendue convenable, donneront les pressions totales d'une portion finie de surface qui s'exercent parallélement à chacun des axes coordonnés.

263. On déduit de ces valeurs une conséquence très-importante. L'hypothèse de l'article 259 subsistant, imaginons qu'un corps est entièrement plongé dans le fluide, et considérons les deux élémens opposés

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			183. Trouver, dans l'hypothèse du problème 210, la pression d'un élément différentio-différentiel de surface en fonction des coordonnées de cet élément.
			184. Décomposer la pression donnée par la solution du problème précédent, en trois autres parallèles aux trois axes coordonnés.
		116. Un fluide renfermé dans un vase et soumis à l'action d'une force qui agit sur lui par l'intermède	

de sa surface qui ont pour projection commune sur le plan xy le parallélogramme élémentaire $dx_{,}\, dy_{,}$, la pression, parallèle à l'axe des z, de l'élément inférieur (on suppose que c'est celui désigné par ω, dont il s'agit dans les art. 261 et 262) sera $\frac{\Pi}{A} . dx_{,}\, dy_{,}$, et celle de l'élément supérieur sera $\frac{-\Pi}{A}\, dx_{,}\, dy_{,}$. Ainsi le corps sera en équilibre par rapport aux composantes des pressions prises parallélement à l'axe des z. Mais si l'on fait attention qu'il y a encore, parallélement aux y, un élément opposé à celui qu'on a considéré en premier lieu, ces deux élémens ayant une projection commune sur le plan xz, et la surface de cette projection étant $(\frac{dz_{,}}{dy_{,}})dy_{,}.dx_{,}$ (ou $dz_{,}\, dx_{,}$, en ne prenant $dz_{,}$ que par rapport à $y_{,}$), et qu'il y a parallélement aux x un autre élément, ayant avec l'élément ω, pour surface de projection commune sur le plan yz, le produit $(\frac{dz_{,}}{dx_{,}})\, dx_{,} . dy_{,}$ (ou $dz_{,}\, dy_{,}$, en ne prenant $dz_{,}$ que par rapport à $x_{,}$), on en conclura que l'équilibre conclu parallélement à l'axe des z, existe aussi parallélement aux deux autres axes, et qu'ainsi le corps est dans une immobilité absolue. On peut, si l'on veut, rendre le raisonnement plus simple, en observant que la position du plan xy est arbitraire, et que, quelque part qu'on le place, on obtiendra toujours des équations semblables à celles de l'article précédent.

Cette conclusion est générale pour tous les cas où un corps sera, d'une manière quelconque, sollicité sur toute l'étendue de sa surface par des puissances respectivement perpendiculaires et proportionnelles aux élémens différentio-différentiels sur lesquels elles agissent.

264. Nous pouvons passer à l'équation générale de l'équilibre d'un fluide sollicité par des puissances quelconques. On trouve pour les conditions de cet équilibre,

$$dp = k\,(Xdx + Ydy + Zdz),$$

ou . . . . $dp = kd\Phi$.

265. L'ÉQUILIBRE d'un fluide n'est possible que sous certaines conditions, et ces conditions se réduisent toujours à celles qui rendent

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		d'un piston, étant supposé en équilibre, un corps entièrement plongé dans ce fluide, et qui par conséquent éprouvera normalement, sur tous les élémens de sa surface, des pressions proportionnelles à ces élémens, sera, par cette raison, lui-même en équilibre.	
p = la pression, rapportée à l'unité de surface, qui a lieu au point dont les coordonnées sont x, y et z. k = la densité au même point. X, Y et Z les puissances, décomposées parallélement aux x, y et z, qui sollicitent la molécule fluide, dont les coordonnées sont x, y et z. $Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi$.		117. Les conditions qui rendent l'équilibre d'un fluide possible, sont les	185. Trouver l'équation générale de l'équilibre des fluides. 186. Déterminer les conditions qui doivent avoir lieu pour que l'équilibre d'un fluide soit possible.

une fonction intégrable. En effet, l'équation précédente est obtenue en substituant dans la différentielle complète,

$$dp = \left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(\frac{dp}{dz}\right)dz,$$

les valeurs

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = kX, \left(\frac{dp}{dy}\right) = kY, \left(\frac{dp}{dz}\right) = kZ.$$

Il suit de là, 1.° que $Xdx + Ydy + Zdz$ doit être une fonction intégrable par elle-même, indépendamment de toute relation particulière entre x, y et z; ce qui suppose que X, Y et Z sont fonctions de x, y et z, et a lieu sous les conditions exprimées par les équations

$$\left(\frac{dX}{dy}\right) = \left(\frac{dY}{dx}\right), \left(\frac{dX}{dz}\right) = \left(\frac{dZ}{dx}\right), \left(\frac{dY}{dz}\right) = \left(\frac{dZ}{dy}\right);$$

2.° que k doit être fonction de Φ seule, ou de p seule, ou de Φ et de p, afin que l'équation ne renferme que les deux variables p et Φ.

266. L'ÉQUILIBRE est toujours possible, lorsque les puissances qui sollicitent les molécules fluides sont dirigées à des centres fixes et fonctions des distances entre leurs points respectifs d'application et ces centres. L'équation de l'article 264 se change, dans ce cas, qui comprend tous ceux de la nature, en

$$\frac{dp}{k} = \begin{cases} \frac{Q_{,}}{\rho_{,}}\left[(x-a_{,})dx + (y-b_{,})dy + (z-c_{,})dz\right] \\ + \frac{Q_{,,}}{\rho_{,,}}\left[(x-a_{,,})dx + (y-b_{,,})dy + (z-c_{,,})dz\right] \\ + \frac{Q_{,,,}}{\rho_{,,,}}\left[(x-a_{,,,})dx + (y-b_{,,,})dy + (z-c_{,,,})dz\right] \\ + \&c. \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\frac{dp}{k} = Q_{,}d\rho_{,} + Q_{,,}d\rho_{,,} + Q_{,,,}d\rho_{,,,} + \&c.$$

267. LA somme $S(dp)$, prise dans toute l'étendue d'un canal quelconque, infiniment étroit, et qui est, ou rentrant sur lui-même, ou terminé à deux points de la surface extérieure de la masse fluide, cette somme, dis-je, est toujours nulle, en ayant égard à la résistance de

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		mêmes que les conditions d'intégrabilité d'une fonction différentielle de plusieurs variables.	
$Q_{,}$, $Q_{,,}$, &c., sont les diverses puissances qui sollicitent la molécule dont les coordonnées sont x, y et z. Ces puissances sont dirigées à des centres fixes, dont les distances respectives à la molécule sollicitée sont $\rho_{,}$, $\rho_{,,}$, $\rho_{,,,}$, &c. Les coordonnées de ces centres fixes, rapportées à l'origine et parallèles aux axes des x, y et z, sont respectivement $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$; $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$; &c. Ainsi on a $X = \frac{Q_{,}}{\rho_{,}}(x - a_{,}) + \frac{Q_{,,}}{\rho_{,,}}(x - a_{,,}) + \&c.$ $Y = \frac{Q_{,}}{\rho_{,}}(y - b_{,}) + \frac{Q_{,,}}{\rho_{,,}}(y - b_{,,}) + \&c.$ $Z = \frac{Q_{,}}{\rho_{,}}(z - c_{,}) + \frac{Q_{,,}}{\rho_{,,}}(z - c_{,,}) + \&c.$		118. Les conditions précédentes ont toujours lieu, lorsque les puissances qui sollicitent les molécules fluides sont dirigées à des centres fixes et fonctions des distances entre leurs points respectifs d'application et ces centres. 119. Le principe des vîtesses virtuelles a lieu dans l'équilibre des fluides.	187. Introduire dans l'équation d'équilibre des fluides les puissances effectives qui sollicitent une molécule quelconque.

la paroi, si le fluide est renfermé dans un vase et si l'on suppose que le canal ait une de ses extrémités à un point de cette paroi. On conclut de là que pour tous les cas de l'équilibre d'un fluide, l'équation suivante a lieu dans toute l'étendue de la masse :

$$S[k(Q_{,}d\varrho_{,} + Q_{,,}d\varrho_{,,} + Q_{,,,}d\varrho_{,,,} + \&c.)] = 0$$

Les produits $k\,Q_{,}$, $k\,Q_{,,}$, &c., sont proportionnels aux forces motrices que chaque puissance tend à imprimer à la molécule.

qui équivaut à

$$R'dr' + R''dr'' + R'''dr''' + \&c. = 0 \ldots$$

R', R'', &c., représentent ici les forces motrices imprimées à chaque molécule.

équation identique avec celle qu'on déduirait du principe des vîtesses virtuelles. Cette manière de vérifier ce principe dans l'équilibre des fluides, et la démonstration que j'en ai donnée pour les corps solides, dans le n.° 5 du Journal de l'École polytechnique, me paraissent nouvelles.

268. L'HYPOTHÈSE de l'art. 266 subsistant, l'équation

$$dp - kd\Phi = 0$$

fait voir que, lorsqu'un fluide est parvenu à l'état d'équilibre, il y a une certaine fonction de p et de Φ, ou de p et de x, y, z, qui est un *maximum* ou un *minimum*.

269. LORSQUE k est fonction de p, ce qui a lieu dans les fluides élastiques, on a pour chaque couche dont tous les points éprouvent la même pression, $dp = 0$, d'où $k =$ constante.

Ainsi ces couches, qu'on appelle *couches de niveau*, ont toutes leurs molécules d'égale densité. On a ensuite, par une conséquence de l'hypothèse que p est constante,

$$d\Phi = 0, \text{ ou } Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Φ est donc, en particulier, un *maximum* ou un *minimum* pour chaque couche de niveau, la relation entre les coordonnées des divers points

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$\rho_{,} = \sqrt{[(x - a_{,})^2 + (y - b_{,})^2 + (z - c)^2]}$ $\rho_{,,} = \sqrt{[(x - a_{,,})^2 + (y - b_{,,})^2 + (z - c_{,,})^2]}$ &c. $Q_{,} d\rho_{,} + Q_{,,} d\rho_{,,} +$ &c. $= X dx + Y dy + Z dz = d\Phi$. R', R'', &c., sont les résultantes des puissances qui sollicitent chaque molécule fluide respectivement, r', r'', &c., sont des lignes, de grandeur arbitraire, prises sur les directions de R', R'', &c., à partir de chaque molécule fluide.			
		120. Dans l'hypothèse du théorème 117., il y a toujours une certaine fonction de x, y et z, qui est un *maximum* ou un *minimum*.	
	54. Des couches de niveau dans un fluide en équilibre sollicité par des puissances quelconques.	121. Les équations des surfaces des couches de niveau dans les fluides élastiques en équilibre, se déduisent de la considération que Φ est un *maximum* ou un *minimum* pour ces sortes de couches.	188. Trouver l'équation de la surface d'une couche de niveau quelconque dans un fluide élastique en équilibre.

de la surface de cette couche étant donnée par l'équation

$$\Phi = \text{constante}.$$

270. Si la densité k est fonction de Φ, et ne dépend point de la pression, ou si elle est constante, ce qui renferme toutes les hypothèses de fluides incompressibles, on aura en général

$$p = \int [k(Xdx + Ydy + Zdz)] + \text{constante},$$

et l'équation de la surface de la couche extérieure pour laquelle $p = 0$, sera

$$\int [k(Xdx + Ydy + Zdz)] = \text{constante}.$$

271. En conservant l'hypothèse de k, fonction de Φ, qui rend k et Φ variables ou constantes dans les mêmes circonstances, toutes les couches de l'intérieur du fluide dans l'étendue desquelles on aura Φ = constante ou $d\Phi = 0$, donneront aussi k = constante; toutes les molécules de ces couches auront la même densité, et l'équation de leur surface sera

$$\Phi = \text{constante};$$

et comme, en faisant dans l'équation $dp - kd\Phi = 0$, les quantités k et Φ constantes, on a $dp = 0$, il s'ensuit que dans les fluides incompressibles en équilibre, les couches dans l'étendue desquelles $d\Phi = 0$ sont des couches de niveau, c'est-à-dire, dont toutes les molécules ont la même densité et éprouvent la même pression.

L'inverse de cette proposition n'est pas généralement vraie; la densité k peut être constante dans des sections de la masse de certains fluides où l'on n'aurait ni $d\Phi = 0$, ni $dp = 0$; les fluides incompressibles homogènes sont dans ce cas.

272. Si l'on cherche la position de la normale à un point quelconque d'une surface qui a pour équation différentielle

$$d\Phi = 0, \text{ ou } Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

on trouve, pour les tangentes des angles que les projections de cette normale sur les plans des xz et des yz font respectivement avec les axes des x et des y,

$$\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)} = \frac{-Z}{X}, \quad \frac{1}{\left(\frac{dz}{dy}\right)} = \frac{-Z}{Y}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			189. Trouver la même chose pour un fluide incompressible en équilibre.
		122. Si dans un fluide incompressible en équilibre, k = fonction de Φ, toute couche de ce fluide pour laquelle on aura Φ = constante (ce qui donne l'équation de la surface de cette couche) sera une couche de niveau.	
		123. Dans un fluide en équilibre, la résultante de toutes les puissances qui agissent sur une molécule quelconque, a une direction perpendiculaire à la surface de la couche de niveau sur laquelle se trouve cette molécule.	190. Trouver la position de la normale à la surface d'une couche de niveau d'un fluide en équilibre.

On trouve, d'un autre côté, que les projections de la direction de la résultante des puissances X, Y et Z sur les plans des xz et des yz, ſont (en supposant que les puiſſances tendent à rapprocher la molécule de l'origine), avec les axes des x et des y respectivement, des angles qui ont pour tangentes $\frac{-Z}{X}$ et $\frac{-Z}{Y}$; donc les directions des puiſſances résultantes qui agiſſent sur chaque molécule d'un fluide en équilibre, sont perpendiculaires aux couches de niveau dans lesquelles ces molécules sont respectivement placées.

273. Dans les cas où toutes les puiſſances sont dirigées à un centre unique et fonctions des distances au centre, l'équation d'équilibre de l'article 266 devient

$$\frac{dp}{k} = \frac{Q}{\rho}\left[(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz\right],$$

ou $\frac{dp}{k} = Q d\rho$.

En supposant l'origine au centre fixe, cette équation devient

$$\frac{dp}{k} = \frac{Q}{\rho}(x dx + y dy + z dz);$$

et si la densité k est constante ou fonction de p, l'équation de la surface d'une couche de niveau quelconque sera,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{constante},$$

équation à la surface d'une sphère dont le centre coïncide avec le point de réunion commun des directions de toutes les forces.

274. L'équation générale de l'équilibre des fluides, appliquée au cas de la pesanteur, devient, en supposant que l'axe des z est vertical et que la pesanteur tend à diminuer les z,

$$\frac{dp}{k} = -\, g dz.$$

275. Si le fluide pesant est homogène et incompressible, on aura, en intégrant l'équation précédente,

$$p = P + kg(h - z).$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
Q = puissance dirigée à un centre fixe qui agit sur une molécule quelconque. a, b, c sont les coordonnées du centre fixe, respectivement parallèles aux x, y et z.		124. La surface d'une couche quelconque de niveau d'un fluide en équilibre, sollicité par des puissances qui tendent à un centre commun, est une surface sphérique dont le centre coïncide avec le point de réunion des directions de toutes les puissances.	191. Trouver l'équation d'équilibre d'un fluide, dans le cas où les puissances sollicitantes ont des directions qui tendent à un centre commun.
g = la force accélératrice de la pesanteur. p = la pression, rapportée à l'unité de surface, qui a lieu dans le plan horizontal passant par l'extrémité de z. k = la densité des molécules fluides comprises dans		125. Dans le cas de l'équilibre des fluides pesans, les molécules d'une même couche horizontale sont également pressées.	192. Trouver l'équation de l'équilibre des fluides pesans.

276. La pression qu'on vient de trouver, ne dépendant ni des coordonnées x et y ni de la forme du vase, mais uniquement de l'enfoncement de la molécule au-dessous de la surface supérieure du fluide, on déduit de l'équation précédente l'égalité de pression dans toutes les couches horizontales, et le niveau du fluide à sa surface supérieure, dans des tuyaux qui se communiquent et dont le nombre et la courbure sont arbitraires.

277. Si l'on prend l'origine des z à la surface supérieure du fluide, et qu'on compte les z positives au-dessous de cette surface, on aura

$$p = \pi(z + a).$$

278. Cette pression est rapportée à l'unité de surface; et on a, pour la pression d'un élément différentio-différentiel ω de surface, la valeur

$$\omega\pi(z + a),$$

qui est le poids absolu d'un prisme du fluide, dont la base serait ω et la hauteur $z + a$.

La pression à la surface supérieure serait $\omega\pi a$; c'est celle due à l'atmosphère ou à une puissance quelconque qui agirait également sur tous les points du plan horizontal passant par l'origine des z. Cette même pression, à une profondeur z, mais dans l'hypothèse où on aurait établi le vide au-dessus de la surface supérieure, serait $\omega\pi z$; d'où on conclut le théorème 126.

279. On trouve pour la somme des pressions normales qui s'exercent sur une surface quelconque,

$$\pi . S[(z + a)\,dA],$$

qui a pour valeur.... $\pi A(H + a)$,

et d'où on déduit les théorèmes 127 et 128, en observant que πAH se rapporte à la pression particulière du fluide, et πAa à la pression qui s'exerce sur une étendue égale à A de la surface supérieure du fluide.

280. On a, art. 261,

$$\omega = dx\,dy\,\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]},$$

valeur qui, substituée dans celle de l'art. 278, donne pour la pression

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
ce plan horizontal, qui, pour le cas de l'art. 275, est la densité constante de toute la masse fluide. P = la pression, rapportée à l'unité de surface de l'atmosphère ou toute autre pression constante qui s'exerce à la surface supérieure du fluide. S'il s'agit de l'équilibre de l'eau, P équivaut au poids d'un prisme d'eau qui a l'unité pour base et 10,392 mètres de hauteur. a = la hauteur d'un prisme du fluide homogène et incompressible dont on cherche la pression, ce prisme ayant l'unité pour base et un poids égal à P. h = l'abaissement de l'origine des z au-dessous de la surface supérieure du fluide. π = la pesanteur spécifique du fluide supposé homogène et incompressible. A = la surface dont on cherche la pression. H = la distance du centre d'inertie de la surface pressée à la surface supérieure du fluide.	55. De l'instrument appelé *syphon.*	126. Un fluide pesant doit s'élever au même niveau dans un nombre quelconque de tuyaux ou syphons, de courbure arbitraire, qui communiquent entre eux; et cette propriété a lieu également dans le vide et dans un milieu qui exercerait sur tous les points de la surface supérieure du fluide une pression commune quelconque. 127. Une portion différentio-différentielle de surface plongée dans un fluide pesant, homogène et incompressible, éprouve, dans le cas de l'équilibre, une pression égale au poids d'un prisme de ce fluide qui aurait cette surface pour base, et pour hauteur son enfoncement dans le fluide; plus à la pression que cette même surface éprouverait si elle était placée au niveau supérieur du fluide. 128. Si une surface quelconque est plongée dans un fluide pesant, la somme des pressions normales qu'éprouve chacun	193. Appliquer cette équation au cas où le fluide est homogène et incompressible.

qu'exerce un fluide pesant, homogène et incompressible, sur un élément différentio-différentiel de surface,

$$\pi(z + a).dx\,dy\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}.$$

281. Et les composantes de cette pression, parallèles aux axes coordonnés, sont

parallélement à l'axe... des x ... $-\pi(z + a)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx.dy$

des y ... $-\pi(z + a)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy.dx$

des z ... $\pi(z + a)dx\,dy.$

282. Concevons deux plans horizontaux infiniment près, qui coupent la surface pressée et qui comprennent entre eux une zone fermée, et dont le contour entier soit en contact avec le fluide. Observons ensuite, 1.° que $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ sont égaux entre eux, et à la distance entre les deux plans horizontaux; 2.° que z est constant pour la section de la surface faite par l'un ou l'autre de ces plans; 3.° qu'il y a toujours soit dans la direction parallèle aux x, soit dans celle parallèle aux y, deux élémens opposés qui ont la même projection $dz_{,} dy_{,}$ sur le plan $yz_{,}$ ou $dz_{,} dx_{,}$ sur le plan xz, et qui éprouvent, dans ces directions respectives, des pressions égales et directement opposées, et nous aurons pour la zone dont il s'agit,

$$S\left[\pi(z + a)\left(\frac{dz}{dx}\right)dx\,dy\right] = 0$$

$$S\left[\pi(z + a)\left(\frac{dz}{dy}\right)dy\,dx\right] = 0.$$

La même destruction des forces a lieu pour une portion quelconque de la zone, dans le sens parallèle à la corde qui soutend l'arc de courbe que cette portion de zone embrasse; et le résultat de cet article donne le théorème 129, en observant qu'une suite de zones élémentaires pour chacune desquelles la propriété sus-énoncée a lieu, fournit une zone de grandeur finie qui jouit de cette même propriété.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		de ses élémens est égale au poids d'un prisme du même fluide dont la base contiendrait autant d'unités superficielles que la surface pressée, et dont la hauteur serait égale à l'enfoncement dans le fluide, du centre d'inertie de cette surface pressée; plus à la pression qui s'exerce sur une portion de la surface supérieure du fluide pareillement égale à la surface pressée. 129. Une surface étant plongée dans un fluide pesant et en équilibre, les pressions horizontales qui s'exercent sur une zone de cette surface renfermée entre deux plans horizontaux et supposée en contact avec le fluide dans toute son étendue, se détruisent réciproquement. La même destruction a lieu pour une portion de cette zone, séparée du reste par un plan vertical, relativement aux composantes horizontales parallèles à ce plan vertical.	194. Trouver les composantes, parallèles aux axes coordonnés, de la pression qu'un fluide pesant, homogène et incompressible, supposé en équilibre, exerce sur un élément différentio-différentiel d'une surface quelconque.

283. Soient $z_{\prime}$ et $z_{\prime\prime}$ les coordonnées de deux élémens différentio-différentiels opposés de la surface pressée qu'on suppose se trouver dans la même verticale et avoir $dxdy$ pour projection sur le plan des xy; la pression, parallèle aux z, du prisme infiniment mince terminé par ces deux élémens différentio-différentiels, sera

$$\pi(z_{\prime\prime} - z_{\prime} + a)dxdy.$$

C'est la même pression verticale qu'éprouverait le prisme élémentaire de fluide qui remplace le prisme correspondant du corps plongé: conclusion qui d'ailleurs est évidente d'elle-même.

En étendant ce résultat à une portion finie et à toutes les valeurs possibles de $z_{\prime}$, parmi lesquelles se trouve $z_{\prime} = 0$, on trouve les théorèmes 130 et 131.

284. Les composantes uniques qui représentent les sommes des composantes élémentaires de l'art. 281, sont à des distances des plans coordonnés dont voici les valeurs:

Composantes uniques qui représentent les sommes des composantes élémentaires parallèles aux axes des...

- x, dont la distance au plan.......
  - xy est.... $\dfrac{S\{(z+a)z(\frac{dz}{dx})dx.dy\}}{S\{(z+a)(\frac{dz}{dx})dx.dy\}}$
  - xz est.... $\dfrac{S\{(z+a)y(\frac{dz}{dx})dx.dy\}}{S\{(z+a)(\frac{dz}{dx})dx.dy\}}$
- y, dont la distance au plan.......
  - xy est.... $\dfrac{S\{(z+a)z(\frac{dz}{dy})dy.dx\}}{S\{(z+a)(\frac{dz}{dy})dy.dx\}}$
  - yz est.... $\dfrac{S\{(z+a)x(\frac{dz}{dy})dy.dx\}}{S\{(z+a)(\frac{dz}{dy})dy.dx\}}$
- z, dont la distance au plan......
  - xz est.... $\dfrac{S\{(z+a)ydy.dx\}}{S\{(z+a)dx.dy\}}$
  - yz est.... $\dfrac{S\{(z+a)xdx.dy\}}{S\{(z+a)dx.dy\}}$,

en prenant les sommes dans l'étendue convenable.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$z_{,}$ et $z_{,,}$ sont les deux coordonnées de deux élémens différentio-différentiels d'une surface pressée par un fluide : élémens qui sont supposés placés dans la même verticale.		130. Un prisme vertical pris dans un corps plongé dans un fluide pesant et en équilibre et dont les deux bases font partie de la surface de ce corps, éprouve la même pression verticale que le prisme de fluide qu'il remplace.	
a, x, y et z ont la même signification qu'à l'article 281.		131. Un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide pesant et en équilibre, éprouve de la part de ce fluide une poussée verticale représentée par une puissance unique, égale au poids de la masse fluide déplacée, et dont la direction passe par le centre d'inertie de cette masse ; d'où il suit que ce corps perd une partie de son poids égale au poids de la masse fluide qu'il déplace.	195. Une surface courbe étant pressée par un fluide pesant, homogène et incompressible, trouver les sommes des composantes, parallèles aux trois axes coordonnés, des pressions, et les distances aux trois plans coordonnés, des directions des trois composantes qui représentent ces sommes.

285. Ces trois composantes se réduiront à une composante unique, lorsque les conditions énoncées art. 149, auront lieu. Dans ce cas, la composante unique sera

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)},$$

et fera respectivement avec les axes ds ex, des y et des z, des angles dont les cosinus seront

$$\frac{X}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}, \quad \frac{Y}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}, \quad \frac{Z}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}.$$

286. Les momens des poussées par rapport à chacun des axes coordonnés, sont :

Somme des momens des pressions par rapport aux axes

des $x \ldots \pi \{ S[z(z+a)dxdy] + S[z(z+a)(\frac{dz}{dy})dy.dx] \}$

des $y \ldots \pi \{ S[z(z+a)dxdy] + S[z(z+a)(\frac{dz}{dx})dx.dy] \}$

des $z \ldots \pi \{ S[z(z+a)(\frac{dz}{dx})dxdy] - S[x(z+a)(\frac{dx}{dy})dy.dx] \}$.

287. Soit une surface cylindrique, à base quelconque, dont la ligne droite génératrice est horizontale, parallèle à l'axe des x et de longueur variable ; cette surface étant supposée présenter sa convexité au plan xz donnera

$$(\frac{dz}{dx})dx = 0, \quad (\frac{dz}{dy})dy = dz:$$

ensuite, pour intégrer par rapport à dx, il suffira de substituer ξ à dx ; ce qui changera les valeurs de l'art. 281 en

$$X = 0, \quad Y = -\pi S[\xi(z+a)dz], \quad Z = -\pi S[\xi(z+a)dy];$$

et on aura pour les distances des directions de Y et de Z aux plans coordonnés : en observant que chaque zone horizontale élémentaire étant également pressée sur toute sa longueur, on peut la regarder comme concentrée dans son point milieu, auquel les coordonnées x, y et z sont censées appartenir.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$X = - \pi . S \left[(z + a) \left(\frac{dz}{dx} \right) dx dy \right].$ $Y = - \pi . S \left[(z + a) \left(\frac{dz}{dy} \right) dy dx \right].$ $Z = \pi . S \left[(z + a) dx dy \right].$			196. Trouver, lorsqu'il existe une résultante unique, sa quantité et sa direction.
			197. Trouver, par rapport à chacun des trois axes coordonnés, les sommes des momens des pressions.
			198. Appliquer les solutions des problèmes généraux 223, 224, 225 et 226, 1.° Au cas d'une surface cylindrique à base quelconque, dont la ligne droite génératrice est horizontale;
ξ = la longueur d'une zone horizontale quelconque, infiniment étroite, de la surface cylindrique. x = la distance du milieu de ξ au plan des yz.			

Distance de la direction de Y au plan des......
- $xy \ldots \dfrac{S\{\xi z(z+a)dz\}}{S\{\xi\,(y+a)dz\}}$
- $yz \ldots \dfrac{S\{\xi x(z+a)dz\}}{S\{\xi\,(z+a)dz\}}$

Distance de la direction de Z au plan de......
- $xz \ldots \dfrac{S\{\xi y(z+a)dy\}}{S\{\xi\,(z+a)dy\}}$
- $yz \ldots \dfrac{S\{\xi x(z+a)dy)}{S\{\xi\,(z+a)dy\}}$

Les deux composantes Y et Z pourront se composer en une seule, si elles sont à la même distance du plan yz, ou si on a

$$\frac{S\{\xi x(z+a)dz\}}{S\{\xi\,(z+a)dz\}} = \frac{S\{\xi x(z+a)dy\}}{S\{\xi\,(z+a)dy\}}.$$

Si ces deux directions sont dans le même plan vertical, d'après la condition énoncée ci-dessus, qui est comprise dans celle de l'art. 149, la résultante unique aura pour valeur,

$$\pi\sqrt{\{S[\xi(z+a)dz]\}^2 + \{S[\xi(z+a)dy]\}^2},$$

et fera avec l'horizon un angle dont la tangente sera

$$\frac{-S[\xi(z+a)dy]}{S[\xi(z+a)dz]}.$$

Le contour de la surface pressée devant être donné, on a ξ et x, chacun en particulier, en fonction de z. On a aussi une équation entre z et y, qui est celle de la section verticale de la surface; en sorte que toutes les intégrales de cet article dépendent des quadratures.

Si la surface est terminée par deux plans verticaux parallèles au plan yz, et dont la distance $= b$, on aura $\xi = b$, $x = b + c$; et il n'y aura plus d'autres variables que z et y.

288. Supposons que la ligne droite génératrice de la surface cylindrique soit verticale, de longueur constante, son extrémité supérieure se trouvant toujours dans le plan des xy à la surface supérieure du fluide; supposons de plus que la surface pressée ait avec le plan des xz deux intersections sur deux lignes verticales, le point supérieur de l'une de ces lignes étant l'origine des coordonnées; on aura

$Z = 0$, $X = 0$, $Y = b\pi(\frac{1}{2}z^2 + az)$

Distance de la direction de Y au plan des...
- $yz \ldots \frac{1}{2}b$
- $xy \ldots \dfrac{\frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{2}az}{\frac{1}{2}z + a}$

La valeur de Y est la même qu'on obtiendrait pour le parallélogramme dont b serait la base et z la hauteur.

Il faut, dans chaque cas d'application, donner à l'indéterminée z une valeur particulière relative à la hauteur sur laquelle on veut avoir la pression.

Si la surface supérieure du fluide n'éprouve aucune pression,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
c = la distance au plan yz de celui des plans verticaux qui en est le plus près.			2.° Au cas d'une surface cylindrique à base quelconque, dont la ligne droite génératrice est verticale.
b = distance entre les deux lignes d'intersection du plan xz et de la surface cylindrique.			

on a $a = 0$; et la distance de la direction de Y au plan des xy devient $= \frac{2}{3} z$.

289. Il résulte du théorème 131, que si un corps solide et homogène est plongé dans un fluide pesant, homogène et incompressible, le centre d'inertie de ce corps montera, n'aura aucun mouvement vertical, ou descendra respectivement, selon qu'une des trois conditions suivantes aura lieu ;

$$pV < \pi U ;\ pV = \pi U ;\ pV > \pi U.$$

290. Supposons que le corps soit composé d'une masse de forme quelconque, entièrement submergée et fixée à l'extrémité inférieure d'un cylindre, de telle manière que les centres d'inertie et de figure de tout le système se confondent en un seul point situé dans le prolongement inférieur de l'axe du cylindre ; on aura l'instrument nommé *aréomètre*. qui, lorsque la densité du fluide sera assez grande pour que la condition $pV < \pi U$ puisse être remplie, en y joignant celle qu'une partie du cylindre soit submergée, aura une position telle que l'axe du cylindre sera vertical. Cet instrument, très-utile et très-employé dans la physique, la chimie et les arts, sert à comparer et à mesurer les pesanteurs spécifiques des fluides par ses différens enfoncemens.

291. L'enfoncement dû à une pesanteur spécifique donnée, se calcule par la formule

$$\pi = \frac{p}{v + \frac{1}{4} x n z^2},\ \text{d'où}\ x = \frac{4(p - \pi v)}{n \pi z^2}$$

$p - \pi v$ étant l'excès du poids de l'instrument sur le poids de l'eau déplacée par la boule, on a la raison de la sensibilité de l'aréomètre, dans la possibilité de rendre, par la construction de cet instrument, l'excès $p - \pi v$ aussi petit qu'on veut, de telle sorte qu'un léger changement dans π cause un grand changement dans x.

292. Si l'on suppose que π devienne π', on aura, pour le rapport entre l'augmentation de pesanteur spécifique et l'élévation de l'aréomètre,

$$x - x' = \frac{4p(\pi' - \pi)}{n \pi \pi' z^2}$$ On aura en même temps $x \gtrless x'$ et $\pi \lessgtr \pi'$;

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
V = volume du corps. U = volume du fluide déplacé. V = volume de la partie du corps qui, fixée à l'extrémité intérieure du cylindre, est toujours submergée. p = pesanteur absolue du corps. π = pesanteur spécifique du fluide. π' = une autre pesanteur spécifique dont l'aréomètre donne la différence avec la precédente. x = la longueur submergée de la tige de l'aréomètre pour la pesanteur spécifique π. x' = la longueur correspondante pour la pesanteur spécifique π'. z = le diamètre de la tige de l'aréomètre. n = le nombre de fois que le diamètre est contenu dans la circonférence.	56. De l'instrument appelé *aréomètre.*		199. Les dimensions, la forme et le poids d'un aréomètre étant connus, trouver de combien il s'enfonce dans un fluide d'une pesanteur spécifique donnée; et réciproquement, déduire la pesanteur spécifique de l'enfoncement.
		132. Le diamètre de la partie cylindrique ou de la tige de l'aréomètre demeurant le même, la sensibilité de cet instrument, pour	200. Trouver, au moyen de l'aréomètre, la différence et le rapport des pesanteurs spécifiques de deux fluides.

d'où l'on déduit

$$\frac{\pi}{\pi'} = 1 - \frac{1}{4} n \cdot \frac{\pi(x - x')z^2}{p}$$

$$\pi' - \pi = \frac{1}{4} n \pi^2 \cdot \frac{(x - x')z^2}{p - \frac{1}{4} n \pi (x - x')z^2}.$$

293. La pesanteur spécifique restant la même, si l'on place un poids additionnel au haut de la tige de l'aréomètre, l'enfoncement sera

$$x' - x = \frac{4\omega}{n \pi z^2}.$$

294. La densité π devenant π', et ayant $\pi' > \pi$, si l'on charge l'aréomètre d'un poids ω, tel que x ne varie pas, on aura

$$\frac{\pi}{\pi'} = \frac{p}{p + \omega}; \; \pi' - \pi = \frac{\omega \pi}{p}.$$

Ces formules contiennent tout ce qui est nécessaire pour appliquer le calcul aux observations faites avec l'aréomètre; graduer cet instrument, former des tables, &c., pour les fluides homogènes et incompressibles qui jouissent éminemment de la propriété énoncée art. 247. Mais on a fait abstraction de l'adhésion et de toute espèce d'action du fluide sur le corps plongé, différente de la pression hydrostatique calculée art. 279, circonstances auxquelles il faut néanmoins avoir égard dans les expériences très-délicates.

295. Nous avons supposé au corps plongé, dans tout ce qui précède, une situation telle, que les actions combinées de sa pesanteur et de la poussée du fluide ne tendaient pas à lui faire changer de position; il faut, pour cela, que les forces résultantes qui représentent cette pesanteur et cette poussée, soient égales et directement opposées, et la position du corps, dans ce cas, se nomme *position d'équilibre*.

Les positions d'équilibre d'un corps sont données par les racines d'une

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		indiquer les changemens de pesanteur spécifique, est proportionnelle à son poids absolu. Cette sensibilité est, en général, pour différens aréomètres, dans les raisons, directe du poids de l'instrument, et inverse du carré du diamètre de la tige.	
		133. L'enfoncement de l'aréomètre dû à un poids additionnel placé au haut du cylindre, est, lorsque la pesanteur spécifique ne change pas, proportionnel à ce poids dans un aréomètre donné. Pour différens instrumens, l'enfoncement suit les raisons, directe du poids additionnel, et inverse du carré du diamètre de la tige.	201. Trouver l'enfoncement de l'aréomètre produit par un poids additionnel placé au haut de sa tige. 202. Trouver, par l'emploi des poids additionnels placés au haut de la tige d'un aréomètre, les différences et les rapports des pesanteurs spécifiques de plusieurs fluides.
	57. Des positions d'équilibre d'un corps plongé dans un fluide.	134. Un corps plongé dans un fluide pesant, homogène et incompressible, est dans une position d'équilibre lorsqu'il déplace une portion du fluide d'un poids égal au sien, et que, de plus, les centres d'inertie de	203. Trouver la position d'équilibre d'un corps homogène plongé dans un fluide ; ce qui se réduit en général à résoudre le problème suivant : *Couper, par un plan,*

équation qui en indique le nombre; elles sont quelquefois en nombre infini, ce que l'analyse indique pareillement. Le problème général de la recherche de la position d'équilibre d'un corps peut se ramener au suivant :

Couper, par un plan, un corps homogène de figure donnée, de manière que le volume de l'un quelconque des segmens soit à celui du corps dans un rapport donné, et que la ligne droite qui passe par le centre d'inertie du corps et par ceux des segmens, soit perpendiculaire au plan coupant.

Voici la solution générale de ce problème.

Prenons l'origine des coordonnées au centre d'inertie de la masse entière; les équations de l'*axe normal* étant

$$z = \frac{z_,}{x_,} x\,;\ z = \frac{z_,}{y_,} y\,;\ y = \frac{y_,}{x_,} x,$$

l'équation d'un plan quelconque perpendiculaire à l'*axe normal* ou parallèle au *plan coupant*, sera

$$z + \frac{x_,}{z_,} x + \frac{y_,}{z_,} y = K \ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

K, $\frac{z_,}{y_,} K$ et $\frac{z_,}{x_,} K$ sont les distances de l'origine auxquelles ce plan rencontre respectivement les axes des z, des y et des x; la partie de l'*axe normal* comprise entre l'origine et ce plan, a une longueur égale à

$$\frac{K z_,}{\sqrt{(x_,^2 + y_,^2 + z_,^2)}},$$

et les cosinus des angles que ce même plan fait avec les plans des xy, des xz et des yz, sont respectivement

$$\text{plan } xy \ldots \frac{z_,}{\sqrt{(x_,^2 + y_,^2 + z_,^2)}}$$

$$\text{plan } xz \ldots \frac{y_,}{\sqrt{(x_,^2 + y_,^2 + z_,^2)}}$$

$$\text{plan } yz \ldots \frac{x_,}{\sqrt{(x_,^2 + y_,^2 + z_,^2)}}.$$

La valeur de z tirée de l'équation (a), et substituée dans l'équation $z = f(x, y)$ de la surface du corps, donne

$$y = \frac{z_,}{y_,} K - \frac{x_,}{y_,} x + \frac{z_,}{y_,} f(x, y)$$

On trouve par les règles du calcul intégral, l'aire totale circonscrite par la courbe dont l'équation est ci à côté, exprimée en fonction de K, $x_,$, $y_,$ et $z_,$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
M = volume total du corps. Le *plan coupant* est celui qu'un suppose diviser le corps. L'*axe normal* est la ligne qui passe par l'origine des coordonnées où est le centre d'inertie du corps et par les centres d'inertie des segmens, et qui est, par l'état de la question, perpendiculaire au *plan coupant.* $n : 1$ = rapport de la masse entière à celui des segmens dont le centre d'inertie est dans la région des x, y, z positives. $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ sont les coordonnées de ce centre d'inertie. $z = f(x, y)$, équation de la surface du corps. K = la longueur, sur l'axe des z, comprise entre l'origine et le point où cet axe rencontre un plan quelconque parallèle au *plan coupant.* A = l'aire d'une section du corps faite par un plan quelconque parallèle au *plan coupant.* Cette quantité A est fonction de K, $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$. $K_{,}$ = la plus grande valeur de K, correspondante à		ce corps et du fluide déplacé sont dans une même verticale.	*un corps homogène de figure donnée, de manière que le volume de l'un des segmens soit à celui du corps dans un rapport donné, et que la ligne droite qui passe par le centre d'inertie du corps et par ceux des segmens, soit perpendiculaire au plan coupant.*

C'est l'équation de la projection sur le plan xy, du périmètre de la section faite dans le corps par le plan dont l'équation (a) détermine la position. L'aire circonscrite par ce périmètre étant divisée par le cosinus $z_i : \sqrt{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)}$, donnera la valeur de A, qui est fonction de x_i, y_i, z_i et K.

Si l'on fait $A = 0$, on déduira de cette équation une valeur de K, qui sera celle de K_i.

Autrement, faisant dans l'équation

$$K = \frac{x_i}{z_i} x + \frac{y_i}{z_i} y - f(x, y),$$

$x = \frac{x_i}{z_i} z$, et $y = \frac{y_i}{z_i} z$; ce qui donne pour la relation entre l'ordonnée z de l'axe normal et la ligne K, l'équation

$$K = \left(\frac{x_i^2}{z_i^2} + \frac{y_i^2}{z_i^2}\right) z - f\left(\frac{x_i}{z_i} z, \frac{y_i}{z_i} z\right)$$

et faisant $dK = 0$, on aura une valeur de z, qui sera celle de z_{ii}, correspondante à la plus grande valeur K_i de K; et les coordonnées de l'extrémité de K_i seront

$$z_{ii},\ x_{ii} = \frac{x_i}{z_i} z_{ii},\ y_{ii} = \frac{y_i}{z_i} z_{ii} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{On aura par conséquent} \\ K_i = \sqrt{(x_{ii}^2 + y_{ii}^2 + z_{ii}^2)}. \end{array} \right.$$

Maintenant on a pour la valeur de la somme des tranches élémentaires du solide perpendiculaire à l'axe normal, l'expression

$$\frac{z_i}{\sqrt{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)}} \int A\,dK.$$

On intégrera en regardant K comme seule variable; on complétera l'intégrale dans l'hypothèse qu'elle s'évanouit lorsque $K = K_i$, et on aura la valeur de la portion du volume du corps comprise entre les deux plans perpendiculaires à l'axe normal qui coupent cet axe aux extrémités de K et de K_i.

Cette intégrale sera fonction de x_i, y_i, z_i, K_i et K. Si on l'égale à $\frac{M}{n}$, et qu'on déduise de cette équation une valeur de K, cette valeur sera celle de K_{ii}; l'équation du *plan coupant* sera donc

$$z + \frac{x_i}{z_i} x + \frac{y_i}{z_i} y = K_{ii},$$

dans laquelle il n'y a plus que x_i, y_i et z_i d'inconnues.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
celui des plans perpendiculaires à l'*axe normal* qui rase la surface du corps. $K_{\prime\prime}$ = la partie de l'*axe normal* comprise entre l'origine et le *plan coupant*. ξ, n et v sont les coordonnées du centre d'inertie de la section A, respectivement parallèles aux x, aux y et aux z. $\mu_{\prime}$, $\mu_{\prime\prime}$, $\mu_{\prime\prime\prime}$ sont les sommes des momens, par rapport aux plans des xy, xz et yz, des tranches élémentaires perpendiculaires à l'*axe normal*, prises depuis le *plan coupant* jusqu'à l'extrémité du corps. $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$ sont les coordonnées de l'extrémité de $K_{\prime}$.			

Pour les déterminer, on cherchera les valeurs de ξ, η et ν, qui sont fonctions de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ et K, et on prendra les intégrales

$$\frac{z_{,}}{\sqrt{(x_{,}^{2}+z_{,}^{2}+y_{,}^{2})}}\int A\xi dK,\ \frac{z_{,}}{\sqrt{(x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+z_{,}^{2})}}\int A\eta dK,\ \frac{z_{,}}{\sqrt{(x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+z_{,}^{2})}}\int A\nu dK,$$

depuis $K_{,,}$ jusqu'à $K_{,}$, en les complétant, de manière qu'elles s'évanouissent lorsque $K = K_{,}$; et après les avoir ainsi complétées, en y faisant $K = K_{,,}$, on aura ainsi en $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ les valeurs de $\mu_{,}$, $\mu_{,,}$ et $\mu_{,,,}$. Enfin, on posera les équations

$$\frac{M}{n} z_{,} = \mu_{,,,},\ \frac{M}{n} y_{,} = \mu_{,,},\ \frac{M}{n} x_{,} = \mu_{,},$$

qui donneront, en quantités toutes connues, les valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ *.

La recherche des positions d'équilibre des corps flottans homogènes, n'avait pas encore été, que je sache, ramenée à la solution du problème général qui fait l'objet de cet article, où ce problème est, je crois, résolu pour la première fois. On peut appliquer sa solution à tout corps terminé

* On peut présenter la solution du problème, de manière que les intégrales commencent à l'origine des coordonnées; pour cela, on prendra l'intégrale $\frac{z_{,}}{\sqrt{(x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+z_{,}^{2})}}\int A\,dK$, depuis $K = 0$, jusqu'à $K = K_{,}$, en la complétant de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $K = 0$; et en y faisant ensuite $K = K_{,}$, nommant $M_{,}$ cette intégrale définie qui est exprimée en fonction de $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, la quantité $M_{,}$ sera le volume de la partie du corps comprise entre un plan perpendiculaire à l'axe normal qui coupe cet axe à l'origine et la limite du corps.

Au moyen des intégrales, définie $M_{,}$, et indéfinie $\frac{z_{,}}{\sqrt{(x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+z_{,}^{2})}}\int A\,dK$ (la première étant toujours supposée complétée de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $K = 0$) on aura $K_{,,}$ en posant l'équation $\frac{z_{,}}{\sqrt{(x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+z_{,}^{2})}}\int A\,dK = M_{,} - \frac{M}{n}$, et dégageant K, dont la valeur sera celle de $K_{,,}$.

Enfin, prenant les sommes des momens $\frac{z_{,}}{\sqrt{(x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+z_{,}^{2})}}\int A\,\xi\,dK$, $\frac{z_{,}}{\sqrt{(x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+z_{,}^{2})}}\int A\,\eta\,dK$, $\frac{z_{,}}{\sqrt{(x_{,}^{2}+y_{,}^{2}+z_{,}^{2})}}\int A\,\nu\,dK$; 1.° depuis $K = 0$ jusqu'à $K = K_{,}$, 2.° depuis $K = 0$, jusqu'à $K = K_{,,}$, et désignant respectivement les intégrales définies par $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$; $p_{,}$, $p_{,,}$, $p_{,,,}$ qui seront fonctions de $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, on aura pour évaluer $x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$, les équations

$$\frac{M}{n} z_{,} = P_{,,,} - p_{,,,},\ \frac{M}{p} y_{,} = P_{,,} - p_{,,},\ \frac{M}{n} x_{,} = P_{,} - p_{,}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.

par une surface courbe, dont tous les points se déterminent par une seule équation ; cependant il y aura beaucoup de cas où des considérations particulières et immédiates simplifieront les calculs et abrégeront la solution.

296. Les corps prismatiques, les cylindres à base quelconque, mais perpendiculaires sur l'arête ou apothème longitudinal, et les solides de révolutions, supposés homogènes, ont des positions d'équilibre dont la détermination ne souffre aucune difficulté, théorème 133.

297. Les corps prismatiques ou cylindriques, mentionnés dans l'article précédent, et, en général, ceux symétriques par rapport à un plan, ont des positions d'équilibre dans lesquelles le plan, par rapport auquel ils sont symétriques, est vertical, les conditions du théorème 134 étant d'ailleurs remplies.

298. Un exemple simple suffira pour faire voir comment différentes positions d'équilibre d'un corps sont données par une même équation. Supposons que le solide est un prisme triangulaire dont les arêtes soient horizontales et les plans des bases perpendiculaires sur ces arêtes, il faudra considérer deux cas; savoir, 1.° celui où les bases ont un angle

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		135. Les solides de révolution, les corps prismatiques, dont les bases sont perpendiculaires à l'arête longitudinale, les corps cylindriques dont les bases sont perpendiculaires à la ligne droite génératrice (l'expression *surface cylindrique* étant prise dans l'acception la plus générale), tous supposés homogènes, ont, entre autres positions d'équilibre, les deux positions dans lesquelles l'axe de révolution, l'arête longitudinale ou la ligne droite génératrice sont verticales.	
		136. Les solides prismatiques et cylindriques susmentionnés, et ceux, en général, qui sont symétriques par rapport à un plan, ont des positions d'équilibre dans lesquelles le plan par rapport auquel ils sont symétriques est vertical.	
			204. Trouver les positions d'équilibre d'un prisme triangulaire plongé dans un fluide, dans le cas où

plongé dans le fluide et deux angles hors du fluide ; 2.° le cas inverse.

Le premier cas conduit aux équations

$$x^4 - 2cx^3\cos. m + \frac{p}{\pi}\,.\,2abcx\cos. n - \frac{p^2}{\pi^2}\,.\,a^2b^2 = 0,$$

$$y = \frac{p}{\pi}\,.\,\frac{ab}{x},$$

en supposant que l'angle plongé dans le fluide est celui formé par les côtés a et b.

Le second cas conduit aux équations

$$x^4 - 2cx^3\cos. m + \frac{\pi - p}{\pi}\,2abcx\cos. n - \frac{(\pi - p)^2}{\pi^2}\,a^2b^2 = 0,$$

$$y = \frac{\pi - p}{\pi}\,.\,\frac{ab}{x},$$

en supposant que le seul angle hors du fluide est celui formé par les côtés a et b.

Les équations en x ont trois racines positives qui résolvent la question, et une racine négative qui lui est étrangère ; ce qui donne le théorème 137.

299. Si l'on applique la solution générale précédente au cas où les triangles des bases sont isocèles ; en faisant $a = b$, on trouvera :

Premier cas, dans lequel on suppose que l'angle formé par les deux côtés égaux est seul plongé dans le fluide.

1.re position $x = y$

2.e position
$$x = c\cos. m + \sqrt{(c^2\cos.^2 m - \frac{p}{\pi}a^2)}$$
$$y = c\cos. m - \sqrt{(c^2\cos.^2 m - \frac{p}{\pi}a^2)}$$

3.e position
$$x = c.\cos. m - \sqrt{(c^2.\cos.^2 m - \frac{p}{\pi}a^2)}$$
$$y = c.\cos. m + \sqrt{(c^2.\cos.^2 m - \frac{p}{\pi}a^2)}$$

Second cas, dans lequel on suppose que l'angle formé par les deux côtés égaux est seul hors du fluide.

1.re position $x = y$

2.e position
$$x = c\cos. m + \sqrt{(c^2\cos.^2 m - \frac{\pi - p}{\pi}a^2)}$$
$$y = c\cos. m - \sqrt{(c^2\cos.^2 m - \frac{\pi - p}{\pi}a^2)}$$

3.e position
$$x = c\cos. m - \sqrt{(c^2\cos.^2 m - \frac{\pi - p}{\pi}a^2)}$$
$$y = c\cos. m + \sqrt{(c^2\cos.^2 m - \frac{\pi - p}{\pi}a^2)}$$

Les seconde et troisième positions offrent des valeurs de x et y égales et inversées ; ce qui résulte nécessairement de l'isocélisme du triangle.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	THÉORÈMES.
a et b sont les longueurs de deux des côtés du triangle. c = la longueur d'une ligne droite menée du point d'intersection de a et de b au milieu du troisième côté du triangle. $m + n$ = l'angle formé par les côtés a et b. m = l'angle formé par le côté a, et par la ligne c. n = l'angle formé par le côté b et par la même ligne c. x et y ont leur origine à l'intersection des côtés a et b; x se compte sur a, et y sur b; la ligne droite menée par les extrémités de x et y, est la ligne de flottaison, lorsque le corps est placé dans la position d'équilibre. p et π sont respectivement les pesanteurs spécifiques du corps et du fluide.		137. Un prisme triangulaire homogène, plongé dans un fluide, peut avoir trois positions d'équilibre dans lesquelles ses arêtes sont horizontales.	ses arêtes (qu'on suppose perpendiculaires aux plans des bases) sont horizontales; 1.° Lorsqu'un des angles des bases est plongé dans le fluide, et les deux autres angles hors du fluide; 2.° Dans le cas inverse. 205. Appliquer la solution du problème précédent au cas où les bases sont des triangles isocèles, et trouver les limites des valeurs du rapport des pesanteurs spécifiques qui rendent cette solution possible.

La possibilité de la solution du problème précédent suppose que la valeur du rapport $\frac{p}{\pi}$ est renfermée dans certaines limites qui sont données par les inégalités :

1.er Cas . . . $\frac{p}{\pi} > \frac{2a\cos. m - a^2}{a^2}$, $\frac{p}{\pi} < \frac{c^2 . \cos.^2 m}{a^2}$,

2.e Cas . . . $\frac{p}{\pi} < \frac{2(a^2 - ac.\cos. m)}{a^2}$, $\frac{p}{\pi} > \frac{a^2 - c^2\cos.^2 m}{a^2}$.

Dans le cas du triangle équilatéral, ces conditions deviennent respectivement :

1.er Cas . . . $\frac{p}{\pi} > \frac{8}{16}$, $\frac{p}{\pi} < \frac{9}{16}$.

2.e Cas . . . $\frac{p}{\pi} < \frac{8}{16}$, $\frac{p}{\pi} > \frac{7}{16}$.

Je m'abstiens, pour abréger, de donner d'autres exemples, celui-ci ayant d'ailleurs présenté tous les détails nécessaires à l'objet que j'ai en vue ; mais il sera bon, lorsqu'on exposera cette théorie aux élèves, de rechercher les positions d'équilibre de quelques autres corps.

300. Le problème de la détermination des positions d'équilibre d'un corps flottant est lié à une théorie extrêmement importante par les applications qu'on en fait aux constructions navales, celle de la *stabilité ;* nous verrons bientôt la signification précise de ce mot.

Un corps plongé dans un fluide étant dans la position d'équilibre, nous nommerons *plan de flottaison* la section de ce corps par la surface supérieure horizontale du fluide.

Imaginons que ce corps soit infiniment peu dérangé de la position d'équilibre, de manière cependant que le poids du fluide déplacé demeure toujours égal au poids du corps, le plan de flottaison sera en partie plongé au-dessous et en partie élevé au-dessus de la surface supérieure du fluide ; et on démontre que la ligne droite qui séparera ces deux parties, passe par le centre d'inertie du plan de flottaison. Nous appellerons cette ligne *axe du plan de flottaison.*

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	58. Du *plan de flottaison* d'un corps plongé et en équilibre dans un fluide.		
	59. De l'axe du plan de flottaison.	138. Un corps plongé dans un fluide étant dans la position d'équilibre, s'il est dérangé de cette position avec la condition, 1.° que le dérangement est infiniment petit, 2.° que le poids du fluide déplacé demeure toujours	

301. Plaçons l'origine des x, y, z au centre d'inertie du corps. Soit constamment le plan xy le plan horizontal passant par le centre d'inertie, l'axe des y étant supposé parallèle à l'axe du plan de flottaison. On voit que dans la situation d'équilibre, la position des plans des xy et yz n'est pas la même par rapport au corps qu'après la rotation ω; le plan seul des xz coupe toujours le corps aux mêmes points.

Le moment de la poussée du fluide par rapport à l'axe des y sera égal à

$$P\left(a + \frac{q}{V}\right)\omega.$$

Le moment est pris positivement lorsque la poussée du fluide tend à élever la région des x et z positives, et par conséquent à diminuer l'angle ω.

302. Ayant ainsi déterminé le sens dans lequel la poussée du fluide doit tendre à faire tourner, pour produire un moment positif, on voit, par la nature des quantités qui entrent dans la valeur de ce moment, que son signe dépend de celui de a et de la différence entre a et $\frac{q}{V}$; cette valeur est

positive lorsque...	a est positif..................	Ce signe de a a lieu lorsque le centre d'inertie du fluide déplacé est plus élevé que celui du corps.
	a est négatif et qu'on a $\frac{q}{V} > a$.	Ce signe de a a lieu lorsque le centre d'inertie du fluide déplacé est plus abaissé que celui du corps.
nulle lorsque......	a est négatif et qu'on a $\frac{q}{V} = a$.	
négative lorsque....	a est négatif et qu'on a $\frac{q}{V} < a$.	

Dans le premier cas, la poussée du fluide dont la résultante est dirigée dans la région des x positives, tend à diminuer l'angle formé par les plans *primitif* et *actuel* des xy ou des yz, c'est-à-dire, a, par rapport à la rotation autour de l'axe des y, un effet contraire à celui de la puissance qui a produit le dérangement.

Dans le troisième cas, la poussée du fluide dont la résultante est dirigée dans la région des x négatives, concourt, quant à la rotation

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$P =$ le poids total du corps ou celui du fluide déplacé. $V =$ le volume du fluide déplacé. On nomme respectivement *plans primitifs* et *plans actuels* des xy et yz, les sections du corps par les plans xy et yz, dans la position d'équilibre, et après que cette position a été dérangée par la rotation ω autour de l'axe des y. *Nota.* Le mot plan des xy ou des yz, sans épithète, désignera toujours le *plan actuel.* $q =$ le moment d'inertie du plan de flottaison par rapport à l'*axe du plan de flottaison.* $a =$ la distance entre les centres d'inertie du corps et du fluide déplacé dans la position d'équilibre, cas auquel ces deux centres sont dans la même verticale : cette distance est prise positivement lorsque le centre d'inertie du fluide déplacé est plus élevé que celui du corps. $\omega =$ l'angle infiniment petit décrit par le corps autour de l'*axe du plan de flottaison*, à partir de la position d'équilibre. Le mouvement de rotation ω est supposé tel, que la partie submergée du plan de flottaison répond à la région des x positives.		égal au poids du corps; la ligne droite qui séparera la partie submergée du plan de flottaison de celle qui ne l'est pas, passera par le centre d'inertie de ce plan.	206. Trouver le moment de la poussée d'un fluide sur un corps flottant infiniment peu dérangé de la position d'équilibre, par rapport à un axe horizontal passant par le centre d'inertie de ce corps, et parallèle à l'*axe du plan de flottaison.*

autour de l'axe des y, avec la puissance qui a produit le dérangement; et tend par conséquent à l'augmenter.

Dans le second cas, la poussée du fluide dont la résultante passe par l'axe des y, ne tend ni à diminuer ni à augmenter l'angle décrit par le corps autour de cet axe.

Ce moment, qui mesure l'énergie avec laquelle la restitution du corps à la position d'équilibre tend à se faire, est, comme on voit, proportionnel à l'angle décrit.

303. Si plusieurs corps flottans sont, à partir de la position d'équilibre, inclinés d'une même quantité angulaire ω infiniment petite, les valeurs de $P(a + \frac{q}{V})$ qui appartiendront à chacun de ces corps en particulier, mesureront leurs *stabilités* respectives par rapport aux axes autour desquels on suppose qu'ils ont décrit l'angle ω ; stabilités qui seront *positives*, *nulles* ou *négatives*, suivant que les quantités qui les mesurent se trouveront dans l'un des trois cas de l'article précédent.

304. La résultante verticale de la poussée du fluide rencontre le plan xy à une distance $(a + \frac{q}{V})\omega$ de l'axe des y, et se trouve dans la région des x positives ou négatives, suivant que le premier ou le troisième cas de l'article 302 a lieu.

Cette même résultante rencontre le plan *primitif* des yz à une distance $a + \frac{q}{V}$ de l'axe des y, et le point de rencontre se trouve pareillement au-dessus ou au-dessous du plan xy, qui renferme le centre d'inertie, selon que $a + \frac{q}{V}$ est positif ou négatif.

305. Le second point de rencontre dont j'ai parlé dans l'article précédent, répond à celui que *Bouguer* a nommé *métacentre*. On voit que la poussée de l'eau tendra à diminuer ou à augmenter l'angle ω décrit par le corps flottant autour de l'axe des y, suivant que le *métacentre* sera plus élevé ou plus abaissé que le plan horizontal dans lequel se trouve le centre d'inertie du corps.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	60. De la *stabilité* d'un corps flottant, *positive*, *nulle* ou *négative*.	139. Le moment dont la valeur est demandée par le problème 235, est proportionnel à l'angle décrit par le corps autour de l'axe auquel ce moment se rapporte.	
			207. Trouver, dans l'hypothèse du problème précédent, les distances à l'axe des y, des points où la résultante rencontre tant le plan actuel xy que le plan primitif yz.
	61. Du métacentre.	140. Un corps flottant ayant, à partir de la position d'équilibre, décrit un angle infiniment petit autour d'une ligne horizontale passant par son centre d'inertie, la poussée du	

306. CONSIDÉRANT le moment de la poussée du fluide par rapport à l'axe des x, et prenant ce moment positivement lorsque la poussée tend à faire tourner autour de l'axe des x en élevant la région des y et z positives, on aura pour sa valeur

$$\frac{P}{V}\lambda\,\omega.$$

Le signe de cette expression dépend de celui de λ.

307. LA résultante de la poussée du fluide rencontre le plan xy à une distance $\frac{\lambda\omega}{V}$ de l'axe des x, et se trouve dans la région des y positives ou négatives, suivant que λ est positive ou négative respectivement.

On voit, par cette expression, que le point qu'on a appelé *métacentre*, art. 305, est à une distance du plan vertical xz perpendiculaire à l'axe du plan de flottaison et passant par le centre d'inertie du corps, proportionnelle à ω. Ce point se trouve toujours pour différentes valeurs de ω qui se rapportent à un même axe de rotation sur une même ligne menée dans le plan primitif des yz, passant par le centre d'inertie et faisant avec l'axe des y un angle dont la cotangente $= \frac{\lambda\omega}{aV+q}$. Lorsque $\lambda = 0$, le métacentre est toujours sur une ligne de position fixe dans le corps et passant par le centre d'inertie. Nous examinerons bientôt ce cas.

308. GÉNÉRALISANT les problèmes des articles 301 et 307, on trouve pour la valeur du moment de la poussée du fluide, par rapport à un axe horizontal quelconque passant par le centre d'inertie,

$$P\left\{a\sin.\theta + \frac{q\sin.\theta - \lambda\cos.\theta}{V}\right\}\omega.$$

Le moment est pris positivement, lorsque l'axe auquel on rapporte ce

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
λ = la somme des produits des élémens différentio-différentiels du plan de flottaison par les rectangles des distances de chacun de ces élémens à l'axe du plan de flottaison et à la ligne d'intersection du plan xz et du plan de flottaison. Les distances à l'axe du plan de flottaison sont prises positivement ou négativement, suivant qu'elles se trouvent du côté de la partie submergée ou élevée du plan de flottaison. Les distances au plan des xz sont prises positivement ou négativement, suivant qu'elles se trouvent du côté des y positives ou négatives.		fluide tend à diminuer ou à augmenter cet angle, suivant que le *métacentre* est au-dessus ou au-dessous du plan horizontal dans lequel se trouve le centre d'inertie du corps.	208. Trouver, dans l'hypothèse du problème 206, la valeur du moment de la poussée du fluide par rapport à un axe horizontal passant par le centre d'inertie du corps, et perpendiculaire à une ligne qui, passant par le même centre, serait parallèle à l'*axe du plan de flottaison*. 209. Trouver, toujours dans les mêmes hypothèses, la distance à l'axe des x, de la direction de la résultante de la poussée du fluide, et la ligne tracée sur le plan primitif des yz qui, pour différentes inclinaisons autour d'un même axe, est le lieu géométrique du *métacentre*.
θ = l'angle formé par l'axe des x et par l'axe auquel on rapporte le moment de la poussée du fluide. L'origine de θ est sur l'axe des x, et les θ positifs se comptent dans la région des x et y positives.			210. Trouver le moment de la poussée verticale du fluide par rapport à un axe horizontal quelconque passant par le centre d'inertie du corps.

moment ; passant dans l'angle des x et y positives, la poussée du fluide tend à faire tourner autour de cet axe en élevant l'axe des x, ou, plus généralement, lorsque la partie du corps que la poussée tend à élever est à droite du spectateur, dont l'œil, placé à l'origine des coordonnées, regarde la partie de l'axe de rotation qui, d'abord placée dans l'angle des x et y positives, est supposée prendre diverses positions en tournant de droite à gauche autour de l'axe des z.

En supposant λ positif, l'expression précédente coïncide avec celles des art. 301 et 306, respectivement, lorsque $\theta = \frac{\text{circonf.}}{4}$ et $\theta = \frac{\text{circonf.}}{2}$.

309. Si l'on égale à zéro la valeur précédente, on trouvera

$$\text{tang. } \theta = \frac{\lambda}{aV + q} :$$

c'est la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x la ligne horizontale qui, passant par l'origine, rencontre la direction de la résultante de la poussée verticale du fluide.

Cette valeur de tang. θ peut aussi s'obtenir en divisant la distance $\frac{\lambda}{V}\omega$, art. 307, à l'axe des x, par la distance $(a + \frac{q}{V})\omega$, art. 304, à l'axe des y.

310. Si l'on suppose en général tang. $\theta = \frac{m\lambda}{aV + q}$, la valeur du moment donnée art. 308, deviendra

$$\frac{\lambda(m - 1)}{V} . P\omega \cos. \theta,$$

qui, en supposant que la résultante de la poussée du fluide rencontre le plan xy, dans l'angle des x et y positives, est positive, nulle ou négative, suivant que

$$m > 1, \quad m = 1, \quad \text{ou } m < 1.$$

En général, a et λ étant supposés positifs, l'expression précédente sera positive depuis $\theta = \text{arc tang.} \frac{\lambda}{aV + q}$, jusqu'à $\theta = \text{arc. tang.} \frac{\lambda}{aV + q} + \frac{1}{2}$ *circonf.*, et négative depuis cette dernière valeur de θ jusqu'à θ = circonférence.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			211. Trouver l'axe passant par le centre d'inertie par rapport auquel la poussée du fluide est nulle.
m est un nombre positif quelconque.			212. Déterminer dans quelle étendue la position d'un axe horizontal passant par le centre d'inertie peut varier, sans que le signe du moment de la poussée du fluide change, et assigner la position qui sépare les momens positifs des momens négatifs.
Arc tang. $\frac{\lambda}{aV+q}$ désigne l'arc dont la tangente $= \frac{\lambda}{aV+q}$.			

311. La quantité q qui entre dans la valeur du moment, donnée art. 301, y a été introduite par la considération des centres d'inertie des onglets élémentaires, engendrés par le *plan de flottaison* autour de l'*axe du plan de flottaison ;* et on peut remarquer que les distances, à ce dernier axe, des centres d'inertie des onglets, sont respectivement égales aux distances au même axe considéré comme axe de rotation des centres d'oscillation des segmens du plan de flottaison correspondans aux onglets.

312. Si le plan de flottaison est symétrique par rapport à sa ligne d'intersection avec le plan vertical primitif des xz, qui est perpendiculaire à l'*axe du plan de flottaison* et passe par le centre d'inertie du corps, la valeur du moment de la poussée du fluide, donnée art. 308, et rapportée à un axe horizontal quelconque mené par le centre d'inertie, devient, en observant que $\lambda = o$,

$$P\left(a + \frac{q}{V}\right) \omega \sin.\ \theta.$$

Ce moment est nul lorsque $\theta = o$, et il devient $P\left(a + \frac{q}{V}\right) \omega$. Lorsque $\theta = \frac{1}{4}$ *circonf.*, la distance de la direction de la résultante au plan des xz est nulle. Les mêmes choses ont lieu, à plus forte raison, lorsque le corps entier est symétrique par rapport au plan primitif des xz.

313. Le cas des corps prismatiques et cylindriques homogènes, qui dans la position d'équilibre, et après l'inclinaison ω, ont leurs arêtes et leurs apothèmes horizontales, fournit une expression encore plus simple, en supposant néanmoins que les bases de ces corps sont perpendiculaires sur les arêtes et les apothèmes. On a pour le moment de la poussée du fluide par rapport à un axe horizontal quelconque passant par le centre d'inertie, en observant que dans le cas dont il s'agit, $\frac{q}{V} = \frac{1}{12} \frac{b^3}{A}$,

$$P\left(a + \frac{1}{12} \frac{b^3}{A}\right) \omega \sin.\ \theta.$$

La même formule s'applique à une surface plane verticale.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		141. Lorsqu'un corps flottant prend, à partir de la situation d'équilibre, une petite inclinaison, les distances à l'*axe du plan de flottaison* des centres d'inertie des onglets élevé et submergé, sont respectivement égales aux distances au même axe, considéré comme axe de rotation, des centres d'oscillation des segmens du *plan de flottaison* correspondans aux onglets.	213. Appliquer la solution du problème 210, 1.° Au cas où le plan de flottaison est symétrique par rapport à sa ligne d'intersection avec le plan vertical perpendiculaire sur l'axe de flottaison qui passe par le centre d'inertie du corps.
			2.° Au cas des corps prismatiques et cylindriques homogènes, dont la position dans le fluide est telle, que leurs axes sont horizontaux ;
A = l'aire de la base du prisme ou du cylindre. b = la longueur de la ligne d'intersection du plan de la base et de la surface horizontale du fluide, qu'on peut appeler *ligne de flottaison*.			3.° Au cas des surfaces planes verticales.

314. DANS les cas des deux articles précédens, la direction de la résultante de la poussée du fluide se trouve toujours, quel que soit l'angle ω, pourvu qu'on le suppose très-petit, dans le plan xz vertical, perpendiculaire au plan de flottaison, et passant par les centres d'inertie du corps et du fluide déplacé.

Le *métacentre* est alors donné constamment par l'intersection d'une ligne de position connue et fixe dans le corps (la verticale menée par son centre d'inertie dans la position d'équilibre), et d'une verticale passant par le centre d'inertie du fluide déplacé. C'est à ce cas que se rapporte particulièrement la dénomination de *métacentre*.

Dans tout autre cas, la distance du métacentre au plan xz dépend de l'inclinaison ω. *Voyez* l'article 307.

315. L'AXE horizontal passant par le centre d'inertie du corps, par rapport auquel le moment de la poussée du fluide est un *maximum*, fait avec l'axe des x un angle dont la tangente a pour valeur

$$-\frac{aV+q}{\lambda}.$$

Cet axe est à angle droit sur l'axe horizontal qui, passant par l'origine ou par le centre d'inertie du corps, rencontre la direction de la résultante de la poussée verticale du fluide; il se confond avec l'axe autour duquel l'angle ω est décrit, lorsque le corps est symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à cet axe.

316. UN corps homogène plongé dans un fluide, étant incliné, à partir de la situation d'équilibre, d'une quantité angulaire très-petite, avec la condition que le fluide déplacé a toujours un poids égal à celui du corps (la poussée du fluide ne peut alors avoir d'autre effet que celui de faire tourner le corps autour d'un axe passant par son centre d'inertie), on peut supposer que, dans cet état d'inclinaison, il n'a aucune vîtesse acquise, que par conséquent la poussée du fluide est une puissance verticale qui prend le corps dans l'état de repos, et chercher

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		142. Lorsque les corps flottans sont de l'espèce de ceux auxquels se rapporte le problème 213, le métacentre est donné constamment, quelle que soit l'inclinaison, par l'intersection d'une ligne de position connue et fixe dans le corps (la verticale menée par son centre d'inertie dans la position d'équilibre), et d'une verticale passant par le centre d'inertie du fluide déplacé.	
		143. L'axe dont on demande la position par le problème 214, est à angle droit sur la ligne droite horizontale, qui, passant par le centre d'inertie du corps, rencontre la direction de la résultante de la poussée du fluide.	214. Trouver l'axe horizontal passant par le centre d'inertie du corps flottant, par rapport auquel le moment de la poussée du fluide est un *maximum*, en supposant qu'à partir de la situation d'équilibre ce corps s'est incliné, d'une très-petite quantité, autour d'un axe horizontal de position donnée, passant aussi par son centre d'inertie.

quelles seront les circonstances du mouvement. Je donnerai bientôt la solution générale de ce problème pour un corps de figure quelconque : dans laquelle même, sans nous astreindre à la condition que le poids du fluide déplacé et celui du corps soient égaux, nous ferons entrer le mouvement vertical du centre d'inertie. Le cas des corps homogènes symétriques par rapport à un plan, se déduira aisément de cette solution ; et cependant, comme il peut fournir une application facile et curieuse des formules des art. 312 et 313, je vais exposer sur-le-champ la théorie de leurs oscillations.

Un corps flottant homogène, symétrique par rapport à un plan, étant dans le cas exposé au commencement de cet article, en ajoutant à la condition que le centre d'inertie ne s'élèvera pas, celle que le plan qui sépare le corps en deux parties égales et semblables, est vertical, la poussée du fluide ne peut avoir d'autre effet que de faire tourner le corps autour d'un axe horizontal perpendiculaire à ce plan vertical. La force accélératrice angulaire autour de cet axe a pour valeur, art. 200 et 301,

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{(aV+q)g\omega}{k^2 V},$$

expression dans laquelle tout est constant, excepté la distance angulaire ω à la position d'équilibre, et qui peut prendre la forme

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \left(\frac{aV+q}{k^2 V}\right)g(\Omega - \tau);$$

équation de même espèce que celle donnée pour le pendule simple, article 125, et qui a pour intégrale

$$\tau = \Omega\left\{1 - \cos.\left[t\sqrt{\left(\frac{g(aV+q)}{k^2 V}\right)}\right]\right\},$$

qui représente toutes les circonstances du mouvement, et fait voir que ce mouvement est oscillatoire et isochrone.

317. La durée d'une oscillation entière a pour valeur

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{\left(\frac{k^2 V}{g(aV+q)}\right)}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			215. Un corps flottant homogène, symétrique par rapport à un plan, étant plongé dans un fluide, avec la condition que ce plan soit vertical et que la position du corps soit très-peu différente de la position d'équilibre, trouver dans l'hypothèse où la vîtesse initiale est nulle, et que le poids du fluide déplacé est égal à celui du corps,
t = le temps. T = la durée d'une oscillation entière. Ω et ω sont respectivement les distances angulaires du corps à la position d'équilibre dans le premier instant du mouvement et au bout d'un temps quelconque. τ = l'angle décrit par le corps au bout d'un temps quelconque; on a $\tau = \Omega - \omega$. g = la force accélératrice de la pesanteur.			1.° L'équation qui exprime toutes les circonstances du mouvement;
k^2 est le coëfficient de la masse dans la valeur du moment d'inertie du corps par rapport à l'axe horizontal, passant par le centre d'inertie, autour duquel se fait la rotation. V, A, q, a et b ont les mêmes significations qui leur ont été attribuées depuis l'article 301.		144. Le corps dont on cherche le mouvement par le problème 215, aura un mouvement oscillatoire et isochrone.	2.° La durée des oscillations entières du corps;

318. Et la longueur du pendule synchrone, égale à la quantité linéaire qui est divisée par la force accélératrice g de la gravité, a par conséquent pour valeur

$$\frac{k^2 V}{aV + q}.$$

319. Lorsque le corps est prismatique ou cylindrique à base quelconque, on a

$$\tau = \Omega \{ 1 - \cos. [(t\sqrt{(\frac{g(12aA + b^3)}{12k^2A})}]\}.$$

La durée entière d'une oscillation a pour valeur

$$T = \pi \sqrt{(\frac{12k^2A}{(12aA + b^3)g})},$$

et la longueur du pendule synchrone est égale à

$$\frac{12k^2A}{12.aA + b^3}.$$

320. Il est bon d'appliquer les formules précédentes et celles relatives à la stabilité, à quelques exemples simples.

Supposons que le profil transversal de la partie immergée d'un prisme soit, dans la position d'équilibre, un triangle isocèle, dont les sommets des deux angles égaux soient dans le plan de flottaison, le surplus du profil pouvant avoir une infinité de formes, l'expression de la stabilité sera

$$\frac{(3bh - b^2 + 2a^2)P}{3b},$$

positive, nulle ou négative, suivant qu'on a

$$3h + \frac{2a^2}{b} > b, \quad 3h + \frac{2a^2}{b} = b, \quad 3h + \frac{2a^2}{b} < b.$$

et la longueur du pendule synchrone est égale à

$$\frac{3bk^2}{3bh - b^2 + 2a^2}.$$

Si le profil entier du prisme est un triangle isocèle dont le côté adjacent aux deux angles égaux soit horizontal, la stabilité aura pour valeur

$$\frac{P(\frac{2p^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}c^2 - 2f^2)}{3f},$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			3.° La longueur du pendule synchrone.
			216. Appliquer la solution du problème précédent à un prisme ou à un corps cylindrique à base quelconque, dont l'axe longitudinal est horizontal.
a = la demi-largeur du parallélogramme de flottaison ou la demi-base du triangle isocèle qui est le profil transversal de la partie immergée.			Trouver l'expression de la stabilité et la longueur du pendule synchrone dans le cas d'un prismer homogène flottant, dont l'axe longitudinal est horizontal, et qui dans la position d'équilibre,
b = la hauteur du même triangle isocèle. h = la distance de la surface supérieure du fluide au centre d'inertie du corps. k^2 a la même signification qu'à l'art. 315. P = le poids total du corps.			1.° A pour profil transversal de la partie immergée un triangle isocèle, dont le côté adjacent aux deux angles égaux est dans le plan de flottaison, le surplus du profil pouvant avoir une infinité de formes;
p et π sont respectivement les pesanteurs spécifiques du corps et du fluide.			2.° A pour profil transversal total un triangle isocèle, dont le côté adjacent aux deux angles égaux est horizontal et hors du fluide;

positive, nulle ou négative, suivant qu'on a

$$\frac{p}{\pi} > \frac{f^4}{c^4}, \quad \frac{p}{\pi} = \frac{f^4}{c^4}, \quad \frac{p}{\pi} < \frac{f^4}{c^4},$$

et la longueur du pendule synchrone sera

$$\frac{f(3c^2 - 2f^2)}{12\left(\frac{p^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}c^2 - f^2\right)}.$$

321. Supposons que le profil transversal de la partie immergée du prisme soit, dans la position d'équilibre, un trapèze dont les deux côtés parallèles soient horizontaux et coupés en deux parties égales par la verticale qui dans la situation d'équilibre passe par le centre d'inertie du corps (le côté supérieur étant dans le plan de flottaison), et le surplus du profil pouvant avoir une infinité de formes, on aura pour la stabilité,

$$\frac{3bh(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3}{3b(a+c)}P,$$

positive, nulle ou négative, suivant qu'on a

$$h > \frac{b^2(a+2c) - 2a^3}{3b(a+c)}, \quad h = \frac{b^2(a+2c) - 2a^3}{3b(a+c)}, \quad h < \frac{b^2(a+2c) - 2a^3}{3b(a+c)},$$

et la longueur du pendule synchrone sera

$$\frac{3b(a+c)k^2}{3bh(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3}.$$

Si le profil entier du prisme est triangulaire, on a pour l'expression de la stabilité,

$$\tfrac{2}{3} \cdot \frac{\pi - p}{p} \cdot \frac{P}{f}\left\{\frac{(\pi - p)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot c^2 - f^2\right\},$$

et pour la longueur du pendule synchrone,

$$\tfrac{1}{12} \cdot \frac{p}{\pi - p} \cdot \frac{f(3c^2 - 2f^2)}{\frac{(\pi - p)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}c^2 - f^2}.$$

322. Il est aisé d'augmenter le nombre de ces exemples; mais on voit que pour peu que les cas se compliquent, les expressions ne

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
c = un des côtés égaux du triangle isocèle qui est le profil du prisme flottant. *f* = la hauteur du même triangle.			3.° A pour profil transversal de la partie immergée, un trapèze dont les côtés parallèles sont horizontaux, et coupés en deux parties égales par la verticale qui passe par le centre d'inertie du corps, le surplus du profil pouvant avoir une infinité de formes;
a = le demi-côté supérieur. *c* = le demi-côté inférieur. *b* = la hauteur du trapèze. *h* = la distance de la surface supérieure du fluide au centre d'inertie du solide.			
p, π et *k* ont la même signification que ci-dessus.			4.° A pour profil transversal total, un triangle isocèle dont le côté adjacent aux deux angles égaux, est horizontal et plongé dans le fluide.
c et *f* sont respectivement un des côtés égaux et la hauteur du triangle isocèle.			

peuvent guère avoir une forme simple, ce qui a aussi lieu pour la recherche des positions d'équilibre. Je terminerai ce que j'ai à dire sur cette matière, par l'exposition d'une propriété très-curieuse des positions d'équilibre. *Voyez* le théorème 145.

323. PASSONS maintenant au problème important des petites oscillations des corps flottans, dont la solution conduit à des résultats extrêmement utiles pour la science et l'art de la construction des vaisseaux. L'analyse de ce problème nous offrira une application des formules générales du mouvement d'un corps de figure quelconque, données art. 221 et suivans, nous montrera en même temps le rôle que jouent, dans ces sortes de questions, les équations différentielles linéaires, et comment les intégrales de ces équations conduisent à des fonctions de cosinus, propres à exprimer toutes les circonstances des divers mouvemens oscillatoires que prennent les différentes parties du système (ce dont nous avons vu des exemples art. 125 et 316), et qui indiquent en même temps les cas où le mouvement ne peut point être alternatif, et où le corps, après avoir commencé à s'écarter de la position d'équilibre, s'en écartera toujours de plus en plus. Il y a peu de problèmes de mécanique qui réunissent plus d'objets d'intérêt et de curiosité que celui-ci.

Concevons que par des causes quelconques, un corps flottant soit mis dans une position différente de celle de l'équilibre; ce corps sera sollicité par deux puissances verticales et de directions contraires. La première puissance sera son poids, qui ne peut avoir d'autre effet que de donner à son centre d'inertie un mouvement progressif de haut en bas; la seconde puissance sera le poids ou l'équivalent du poids du fluide déplacé, dont la direction passe par le centre d'inertie de ce fluide déplacé, et qui tend, d'une part, à donner au centre d'inertie du corps un mouvement progressif de bas en haut, et, de l'autre, à faire tourner ce corps autour d'un axe, de position constante ou variable, passant par son centre d'inertie.

324. APPLIQUANT les formules de l'art. 222 à cet état de la question, et considérant que dans le cas dont il s'agit, $X = 0$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		145. Si un corps flottant de figure quelconque, en tournant autour d'un axe parallèle à une ligne fixe, passe successivement par plusieurs positions d'équilibre, les expressions des *stabilités* de ces diverses positions seront alternativement positives et négatives ; d'où il suit que le nombre total de ces positions sera pair, à moins que deux positions consécutives ne se confondent, et dans ce cas la position résultant de leur réunion aura une expression de *stabilité* nulle.	
			218. Un corps flottant étant hors de la position d'équilibre, on demande, 1.° D'assigner les puissances qui agissent sur lui ;

et $Y = 0$, on a pour les équations du mouvement, en supposant l'axe des z vertical,

$$\frac{d^2 z}{g\,dt^2} P = \Pi - P,$$

$$\frac{S[p.d(y_{\prime\prime} dz_{\prime\prime} - z_{\prime\prime} dy_{\prime\prime})]}{g\,dt^2} = \Pi\eta,$$

$$\frac{S[p.d(x_{\prime\prime} dz_{\prime\prime} - z_{\prime\prime} dx_{\prime\prime})]}{g\,dt^2} = \Pi\xi,$$

$$\frac{S[p.d(x_{\prime\prime} dy_{\prime\prime} - y_{\prime\prime} dx_{\prime\prime})]}{g\,dt^2} = 0.$$

325. Les coordonnées $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$ qui ont leur origine au centre d'inertie, peuvent, art. 224, être exprimées en fonctions de coordonnées primitives $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ et $z_{\prime}$ (rapportées à la même origine, et qui déterminent la position du corps correspondante à une valeur donnée t' de t), et des angles σ, τ et φ décrits par le corps pendant le temps $t' - t$ autour des axes des $z_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $x_{\prime\prime}$ qui passent par le centre d'inertie et sont toujours parallèles aux axes fixes des x, y et z, ces derniers servant à déterminer la position absolue du centre d'inertie.

Pareillement Π, η et ξ sont fonctions de leurs valeurs primitives, correspondantes à $t = t'$, ou, si l'on veut, à $t = 0$, de l'espace parcouru verticalement par le centre d'inertie, et des angles décrits par le corps autour de ce centre depuis la même époque. On introduit dans le calcul les vîtesses, tant linéaires qu'angulaires, du centre d'inertie, et du corps autour de ce centre, qui correspondent à $t = t'$, en déterminant convenablement les constantes qui complètent les intégrales.

Cette manière d'envisager la marche de la solution du problème est fort simple; mais les difficultés qui tiennent à l'analyse sont telles, qu'on est obligé, pour parvenir à des résultats applicables, de simplifier

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
t, z, $x_{,,}$, $y_{,,}$ et $z_{,,}$ ont la même signification qu'à l'article 221 ; l'axe des z est vertical. g = la force accélératrice de la pesanteur. P = le poids absolu du corps flottant. Π = le poids absolu du fluide déplacé au bout du temps t. ξ et ν sont respectivement, au bout du temps t, les distances à l'axe des $y_{,,}$ et à celui des $x_{,,}$ de la direction de la puissance Π.			2.° De donner les équations différentielles de son mouvement;
$x_{,}$, $y_{,}$ et $z_{,}$ sont les valeurs de $x_{,,}$, $y_{,,}$ et $z_{,,}$, correspondantes a une valeur donnée t' de t, qui peut être $t' = 0$. σ, τ et φ sont les angles décrits par le corps autour des axes des $z_{,,}$, $y_{,,}$ et $x_{,,}$ respectivement, pendant l'espace de temps qui s'est écoulé entre les deux instans où la position du corps était déterminée par les coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et par les coordonnées $x_{,,}$, $y_{,,}$ et $z_{,,}$.			3.° D'introduire dans ces équations les angles décrits autour de trois axes coordonnés passant par le centre d'inertie et mobiles avec le corps.

la question, en considérant seulement un cas particulier, qui heureusement conduit à des équations finies dont on peut tirer de grands avantages dans la pratique.

326. Le cas dont je parle, est celui où les circonstances du mouvement sont telles, que le corps ne s'éloigne que très-peu de la position d'équilibre. Cette hypothèse permet de négliger des quantités du 2.ᵉ &c. ordre, au moyen de quoi on arrive à des équations différentielles dont l'intégration s'effectue aisément par les méthodes connues.

Pour bien préciser l'état de la question, considérons le corps dans une position donnée, très-proche de celle de l'équilibre, prise à l'instant où l'on compte $t = 0$, instant auquel ce corps n'est supposé avoir aucune vîtesse acquise, soit linéaire soit angulaire ; dans cet état, faisons passer un plan vertical par les centres d'inertie du corps et de sa section horizontale faite au niveau de la surface supérieure du fluide, et prenons ce plan pour celui des xz ou ac, l'origine commune de ces coordonnées étant au point fixe de l'espace qu'occupe le centre d'inertie du corps au moment dont il s'agit, où $t = 0$ et où le mouvement est naissant.

La poussée verticale du fluide commençant à agir sur le corps à l'instant dont nous parlons (instant auquel il est supposé n'avoir encore aucun mouvement), et continuant son action pendant le temps t, aura, au bout de ce temps, fait parcourir un espace vertical z au centre d'inertie du corps, et changé l'inclinaison primitive de ce corps par rapport à la surface supérieure du fluide ou à un plan quelconque de position donnée. Or, ce dernier effet peut toujours se ramener à celui qui serait produit, si, depuis le moment où $t = 0$ jusqu'au bout de t, le corps décrivait des angles σ, τ et φ autour de trois axes mobiles avec le corps (ceux des $z_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $x_{\prime\prime}$, ou lorsque $t = 0$, des $z_{\prime}$, $y_{\prime}$ et $x_{\prime}$, ces dernières coordonnées étant les valeurs initiales des premières), dont l'intersection commune serait au centre d'inertie de ce corps, et qui demeureraient constamment parallèles aux axes fixes des z, y et x, ou aux lignes fixes c, b et a respectivement.

On suppose de plus, pour l'établissement des équations différentielles, qu'au bout du temps t, 1.° l'effet de la rotation τ a été d'élever la

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
Π = la pesanteur spécifique du fluide. ν = le volume du fluide déplacé. A = l'aire de la section horizontale du corps, faite au niveau de la surface supérieure du fluide, section que la petitesse du mouvement permet de regarder comme constante d'étendue et de figure pendant tout le temps t. a, b et c sont les coordonnées initiales du centre d'inertie du fluide déplacé, parallèles aux axes fixes des x, y et z respectivement. f = la distance du centre d'inertie de la surface A, à la ligne d'intersection de cette surface et du plan fixe des yz. $q_{,}$ et $q_{,,}$ sont respectivement les momens d'inertie de la surface A, par rapport aux lignes d'intersection de cette surface avec les plans fixes des xz et des yz. λ = la somme des produits des élémens de la surface A par les rectangles faits des distances de ces élémens aux deux lignes d'intersection de cette surface et des plans xz et yz. Les signes de ces distances sont les mêmes que ceux des coordonnées x et y auxquelles elles répondent, c'est-à-dire que les deux			219. Un corps flottant étant dans une position peu différente de celle de l'équilibre, déterminer toutes les circonstances de son mouvement, en supposant que les vîtesses initiales, tant linéaires qu'angulaires, sont nulles.

région des $x_{\prime\prime}$ positives, et d'abaisser celle des $x_{\prime\prime}$ négatives par rapport à l'axe des $y_{\prime\prime}$; 2.° que l'effet de la rotation φ a été d'élever la région des $y_{\prime\prime}$ positives, et d'abaisser celle des $y_{\prime\prime}$ négatives par rapport à l'axe des $x_{\prime\prime}$. D'après ces deux effets, la direction de la force verticale, agissant de bas en haut, qui produit la rotation, doit rencontrer le plan des $x_{\prime\prime}$ et $y_{\prime\prime}$ dans l'angle des $x_{\prime\prime}$ et $y_{\prime\prime}$ de signe positif, qui est celui des coordonnées initiales a et b.

Ces hypothèses ne limitent en aucune manière la généralité de la solution ; elles servent seulement à fixer les idées lorsqu'on veut mettre le problème en équation, et les intégrales auxquelles on parviendra n'en indiqueront pas moins tant les signes que les valeurs de σ, τ et φ, correspondantes à une valeur quelconque de t.

327. Appliquant aux explications de l'article précédent, la marche indiquée art. 325, on trouve

$$d(y_{\prime\prime}dz_{\prime\prime} - z_{\prime\prime}dy_{\prime\prime}) = x_{\prime}y_{\prime}d^2\tau + (y_{\prime}^2 + z_{\prime}^2)d^2\varphi - x_{\prime}z_{\prime}d^2\sigma$$
$$d(x_{\prime\prime}dz_{\prime\prime} - z_{\prime\prime}dx_{\prime\prime}) = x_{\prime}y_{\prime}d^2\varphi + (x_{\prime}^2 + z_{\prime}^2)d^2\tau + y_{\prime}z_{\prime}d^2\sigma$$
$$d(x_{\prime\prime}dy_{\prime\prime} - y_{\prime\prime}dx_{\prime\prime}) = y_{\prime}z_{\prime}d^2\tau + (x_{\prime}^2 + y_{\prime}^2)d^2\sigma - x_{\prime}z_{\prime}d^2\varphi.$$
$$\Pi = \pi(\nu - Az + Af\tau)$$
$$\Pi\eta = \pi[\nu b - (\nu c + q_{\prime})\varphi - \lambda\tau]$$
$$\Pi\xi = \pi[\nu a + Afz - (\nu c + q_{\prime\prime})\tau - \lambda\varphi].$$

328. Ces valeurs trouvées, on a, pour les équations différentielles du mouvement,

$$(1)\ldots\lambda_{\prime}d^2\tau + \rho_{\prime\prime\prime}d^2\varphi - \lambda_{\prime\prime}d^2\sigma = \pi[b\nu - (c\nu + q_{\prime})\varphi - \lambda\tau]gdt^2$$
$$(2)\ldots\lambda_{\prime}d^2\varphi + \rho_{\prime\prime}d^2\tau + \lambda_{\prime\prime\prime}d^2\sigma = \pi[a\nu + Afz - (c\nu + q_{\prime\prime})\tau - \lambda\varphi]gdt^2$$
$$(3)\ldots\lambda_{\prime\prime\prime}d^2\tau + \rho_{\prime}d^2\sigma - \lambda_{\prime\prime}d^2\varphi = 0$$

Mouvement de rotation autour des axes des $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$ et $z_{\prime\prime}$ respectivement.

$$(4)\ldots d^2z = \left[\frac{\pi}{P}(\nu - Az + Af\tau) - 1\right]gdt^2$$

Mouvement vertical de translation du centre d'inertie du corps.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
distances sont positives dans l'angle des x et y positives, &c. *N.*^{a} Toutes les valeurs précédentes ont lieu à l'instant où $t = o$, c'est-à-dire, se rapportent à la position initiale du corps. $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ et $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ sont respectivement, comme à l'art. 324, les coordonnées d'un même point, lorsque $t = o$, et au bout du temps t, mobiles avec le corps, parallèles aux axes fixes des x, y, z, et ayant leur origine au centre d'inertie du corps. σ, τ et φ sont, comme à l'article 324, les angles décrits par le corps, autour des axes des $z_{,,}$, $y_{,,}$ et $x_{,,}$ respectivement, depuis le moment où l'on compte $t = o$, et où le mouvement est naissant jusqu'au bout du temps t. g, P, Π, ξ et ν ont la même signification qu'à l'article 324. $p =$ le poids absolu d'une molécule élémentaire du corps flottant. $S[p(x_{,}^2 + y_{,}^2)] = \rho_{,}$ $S[p(x_{,}^2 + z_{,}^2)] = \rho_{,,}$ $S[p(y_{,}^2 + z_{,}^2)] = \rho_{,,,}$ $S(px_{,}y_{,}) = \lambda_{,}$ $S(px_{,}z_{,}) = \lambda_{,,}$ $S(py_{,}z_{,}) = \lambda_{,,,}$.			

329. Ces équations, qui sont linéaires du second ordre, peuvent s'intégrer par les méthodes connues, et le calcul n'a d'autre difficulté que la longueur; mais on le simplifiera beaucoup, si on suppose que le corps flottant est symétrique par rapport à la section faite dans le premier instant par le plan des xz ou par celui des $x_{\prime} z_{\prime}$ qui se confond avec le premier, et que la section A du corps qui, par la supposition qu'on vient de faire, est symétrique par rapport au plan xz, l'est aussi, à très-peu de chose près, par rapport au plan yz. Ces hypothèses, qui ont lieu dans les cas d'application les plus ordinaires, donneront

$$\lambda = 0,\quad \lambda_{\prime} = 0,\quad \lambda_{\prime\prime\prime} = 0,\quad d^2\sigma = \frac{\lambda_{\prime\prime}}{\rho_{\prime}} d^2\varphi \ldots$$

Cette dernière équation dérive de l'équation (3) de l'article précédent.

et les quatre équations de mouvement deviendront

$$(1)\ldots \mu d^2\varphi + g\pi m_{\prime}\varphi dt^2 - bgv\pi dt^2 = 0$$

$$(2)\ldots \rho_{\prime\prime} d^2\tau + g\pi m_{\prime\prime}\tau dt^2 - Agf\zeta dt^2 - agv\pi dt^2 = 0$$

$$(3)\ldots \rho_{\prime} d^2\sigma - \lambda_{\prime\prime} d^2\varphi = 0$$

$$(4)\ldots d^2\zeta + Agn\zeta dt^2 - Agnf\tau dt^2 - gnvdt^2 = 0.$$

330. On a pour les intégrales de ces équations, en supposant que lorsque $t = 0$, ζ, φ, σ et τ, et les vîtesses tant linéaires qu'angulaires, sont nulles:

$$\zeta = \frac{\omega_{\prime} c_{\prime\prime} + c_{\prime}}{\Omega_{\prime}(\omega_{\prime} - \omega_{\prime\prime})}\left\{1 - \cos.\, t(\sqrt{\Omega_{\prime}})\right\} - \frac{\omega_{\prime\prime} c_{\prime\prime} + c_{\prime}}{\Omega_{\prime\prime}(\omega_{\prime} - \omega_{\prime\prime})}\left\{1 - \cos.\, t(\sqrt{\Omega_{\prime\prime}})\right\} \ldots\ldots$$

Mouvement de translation verticale du centre d'inertie du corps.

$$\varphi = \frac{\omega_{\prime\prime\prime}}{\Omega_{\prime\prime\prime}}\left\{1 - \cos.\, (t\sqrt{\Omega_{\prime\prime\prime}})\right\} \ldots\ldots$$

Rotation autour de l'axe des $x_{\prime}$.

$$\tau = \frac{(\omega_{\prime\prime} c_{\prime\prime} + c_{\prime})\,\omega_{\prime}}{\Omega_{\prime\prime}(\omega_{\prime} - \omega_{\prime\prime})}\left\{1 - \cos.\, t\sqrt{(\Omega_{\prime\prime})}\right\} - \frac{(\omega_{\prime} c_{\prime} + c_{\prime})\,\omega_{\prime\prime}}{\Omega_{\prime}(\omega_{\prime} - \omega_{\prime\prime})}\left\{1 - \cos.\, (t\sqrt{\Omega_{\prime}})\right\} \ldots\ldots$$

Rotation autour de l'axe des $y_{\prime\prime}$.

$$\sigma = \frac{\lambda_{\prime\prime}}{\rho_{\prime}} \cdot \frac{\omega_{\prime\prime\prime}}{\Omega_{\prime\prime\prime}}\left\{1 - \cos.\, t\sqrt{\Omega_{\prime\prime\prime}}\right\} \ldots\ldots$$

Rotation autour de l'axe des $z_{\prime\prime}$.

331. On voit par ces équations, que si les quantités $\Omega_{\prime}$, $\sqrt{\Omega_{\prime}}$, $\Omega_{\prime\prime}$, $\sqrt{\Omega_{\prime\prime}}$, $\sqrt{\Omega_{\prime\prime\prime}}$ sont réelles, les mouvemens ζ, φ, τ et σ seront alternatifs; et le corps, après s'être élevé et avoir tourné dans un certain

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			220. Appliquer la solution du problème précédent, au cas où le corps est symétrique par rapport à une de ses sections.
$\rho_{,,,} - \frac{\lambda_{,,}^2}{\rho_{,}} = \mu$ $c\nu + q_{,} = m_{,}$ $c\nu + q_{,,} = m_{,,}$ $\frac{\pi}{p} = n.$ $a_{,} = g\pi m_{,,}$; $a_{,,} = Agnf$ $b_{,} = Agf$; $b_{,,} = Agn$ $c_{,} = ag\pi\nu$; $c_{,,} = gn\nu$ $\omega_{,} = \frac{a_{,} - b_{,,} + \sqrt{[(a_{,} - b_{,,})^2 + 4a_{,,}b_{,}]}}{2a_{,,}}$ $\omega_{,,} = \frac{a_{,} - b_{,,} - \sqrt{[(a_{,} - b_{,,})^2 + 4a_{,,}b_{,}]}}{2a_{,,}}$ $\omega_{,,,} = \frac{bg\pi\nu}{\mu}$ $\Omega_{,} = \frac{a_{,} + b_{,,} - \sqrt{[(a_{,} - b_{,,})^2 + 4a_{,,}b_{,}]}}{2}$ $\Omega_{,,} = \frac{a_{,} + b_{,,} + \sqrt{[(a_{,} - b_{,,})^2 + 4a_{,,}b_{,}]}}{2}$ $\Omega_{,,,} = \frac{g\pi m_{,}}{\mu}$			221. Assigner les cas où les divers mouvemens que prendra le corps flottant seront alternatifs, et ceux où ils ne le seront pas.

sens, s'abaissera et tournera dans le sens opposé. C'est ce qu'indiquent les quantités de la forme $\{1 - \cos. (t\sqrt{\Omega})\}$ dont les valeurs, alternativement positives et négatives, n'excèdent jamais certaines limites, quelle que soit la valeur du temps ; comme on voit par la table suivante;

VALEURS de t.	VALEURS de $t\sqrt{\Omega}$.	VALEURS de $\cos. (t\sqrt{\Omega})$.	VALEURS de $\{1 - t\cos.[t\sqrt{\Omega}]\}$.
0	.... 0	.... $+1$ ..	.... 0.
$\frac{Q}{\sqrt{(\Omega)}}$ ..	..... Q	.... 0 ...	.... 1.
$\frac{2Q}{\sqrt{(\Omega)}}$ ..	.... $2Q$	.... -1 ..	.... 2.
$\frac{3Q}{\sqrt{(\Omega)}}$ ..	.... $3Q$	.... 0 ...	.... 1.
$\frac{4Q}{\sqrt{(\Omega)}}$ ..	.... $4Q$	... $+1$ ...	.... 0.
&c.	.... &c.	.... &c.	.... &c.

Les quantités renfermées entre les accolades $\{\ \}$ ont toutes leurs valeurs entre 0 et 2, et toutes les autres quantités qui entrent dans les équations sont constantes.

332. Ainsi, lorsque les quantités $\Omega_{,}$, $\sqrt{\Omega_{,}}$, $\Omega_{,,}$, $\sqrt{\Omega_{,,}}$ et $\sqrt{\Omega_{,,,}}$ seront réelles, le corps flottant ne s'écartera de la position d'équilibre que dans des limites peu étendues. (Il ne faut pas oublier que les vîtesses initiales sont nulles.) Mais si ce cas n'avait pas lieu, alors les intégrales de l'article 330 contiendraient des expressions qui croîtraient indéfiniment avec le temps; les mouvemens z, φ, τ et σ, ou une partie d'entre eux, une fois imprimés, se continueraient toujours dans le même sens, et le corps *chavirerait* ou serait renversé.

333. Les valeurs de φ et de σ, ou les rotations autour des axes des $x_{,,}$ et des $z_{,,}$, seront alternatives lorsque c ou la distance verticale initiale du centre d'inertie du corps flottant à celui du fluide déplacé,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
Q = la longueur du quart de cercle qui a l'unité de longueur pour rayon.			
		146. Les mouvemens du corps flottant seront oscillatoires, tant dans le	

sera positive (ce qui indique que le second centre est plus élevé que le premier); car alors toutes les autres quantités qui entrent dans la valeur de $\Omega_{\prime\prime\prime} = \frac{g\pi m_{\prime}}{\mu} = \frac{(cv + q_{\prime})\rho_{\prime}}{\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime\prime} - \lambda_{\prime\prime}^2} g\pi$, seront positives et $\sqrt{\Omega_{\prime\prime\prime}}$ sera une quantité réelle.

La même chose doit se dire du mouvement vertical z et de la rotation τ autour de l'axe des $y_{\prime\prime}$; car lorsque c sera positive, les quantités

$$\Omega_{\prime\prime} = \tfrac{1}{2}g\left\{\pi(cv + q_{\prime\prime}) + An + \sqrt{\{[\pi(cv + q_{\prime\prime}) - An]^2 + 4A^2nf^2\}}\right\}$$

et $$\Omega_{\prime} = \tfrac{1}{2}g\left\{\pi(cv + q_{\prime\prime}) + An - \sqrt{\{[\pi(cv + q_{\prime\prime}) - An]^2 + 4A^2nf^2\}}\right\}$$

seront positives et réelles; on suppose que $\rho_{\prime}\rho_{\prime\prime\prime} > \lambda_{\prime\prime}^2$ et que la distance f est petite; ce qui a lieu dans les cas ordinaires d'application.

Il suit de là que, lorsque le centre d'inertie du fluide déplacé au premier instant sera plus élevé que celui du corps flottant, le mouvement sera oscillatoire en tous sens, et le corps ne *chavirera* pas : c'est le cas de c positif. Lorsque c sera négatif, les oscillations pourront encore avoir lieu si les rapports de h aux autres quantités données par l'état de la question n'excèdent pas certaines limites.

Tout ce qui est dit dans cet article se rapporte à la théorie de la stabilité donnée art. 303 et suivans, qui pourrait se déduire comme corollaire de celle exposée depuis l'article 323.

334. Si le corps flottant est symétrique non-seulement par rapport à sa section faite dans le premier instant par le plan $x_{\prime}\, z_{\prime}$, comme on l'a supposé art. 329, mais encore par rapport au plan des $x_{\prime}y_{\prime}$, et que, de plus, le poids du corps et celui du fluide déplacé soient égaux, on aura pour tous les instans,

$$f = 0,\ \lambda_{\prime\prime} = 0,\ z = 0,\ \sigma = 0;$$

les équations différentielles du mouvement se réduiront à

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{gb}{\rho_{\prime\prime\prime}}\pi v - \frac{g\pi(cv + q_{\prime})}{\rho_{\prime\prime\prime}}\varphi$$

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \frac{ga}{\rho_{\prime\prime}}\pi v - \frac{g\pi(cv + q_{\prime\prime})}{\rho_{\prime\prime}}\tau,$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		sens vertical qu'autour des axes passant par son centre d'inertie, lorsque ce centre sera plus abaissé que le centre d'inertie du fluide déplacé. La même propriété pourra encore avoir lieu dans une infinité de cas.	
			222. Appliquer la solution du problème 219, au cas où le corps flottant est sýmétrique par rapport à deux de ces sections qui font un angle droit entre elles, et où le poids du fluide déplacé est égal à celui du corps.

et auront pour intégrales

$$\varphi = \Omega'' \left\{ 1 - \cos. \left[t \sqrt{\left(\frac{\pi (cv + q_{,}) g}{\rho_{,,,}} \right)} \right] \right\} \ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{Rotation autour de} \\ \text{l'axe des } x_{,,}, \end{array} \right.$$

$$\tau = \Omega' \left\{ 1 - \cos. \left[t \sqrt{\left(\frac{\pi (cv + q_{,,}) g}{\rho_{,,}} \right)} \right] \right\} \ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{Rotation autour de} \\ \text{l'axe des } y_{,,}. \end{array} \right.$$

en supposant, comme précédemment, que les vîtesses initiales sont nulles.

335. Les deux mouvemens qu'on vient de déterminer, seront évidemment oscillatoires ou alternatifs lorsque c sera une quantité positive, ou lorsque c étant négative on aura

$$q_{,} > cv, \quad q_{,,} > cv;$$

Ils seront nuls lorsque c étant négative, on aura

$$q_{,} = cv, \quad q_{,,} = cv,$$

et ces cas donnent la stabilité *positive*, *nulle* ou *négative*. *Voyez* les articles 303 et suivans.

336. Lorsque le mouvement oscillatoire ou la stabilité positive aura lieu, les plus grands écarts de la position initiale correspondront, dans les formules de l'art. 334, aux valeurs de t, qui donneront

$$\cos. \left[t \sqrt{\left(\frac{\pi (cv + q_{,}) g}{\rho_{,,,}} \right)} \right] = -1; \quad \cos. \left[t \sqrt{\left(\frac{\pi (cv + q_{,,}) g}{\rho_{,,}} \right)} \right] = -1.$$

Les oscillations entières auront donc pour valeurs respectives,

$$\varphi = \frac{2bv}{cv + q_{,}} = 2\Omega'', \quad \tau = \frac{2av}{cv + q_{,,}} = 2\Omega_{,},$$

et se feront respectivement dans des temps égaux à

$$\pi \sqrt{\left(\frac{\rho_{,,,}}{\pi (cv + q_{,}) g} \right)}, \quad \pi \sqrt{\left(\frac{\rho_{,,}}{\pi (cv + q_{,,}) g} \right)}.$$

Ces expressions sont indépendantes des coordonnées horizontales a et b du centre d'inertie du corps flottant ; d'où il suit que la durée des oscillations ne dépend pas de leur amplitude, et que ces oscillations sont isochrones.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$\frac{bv}{cv + q_{,}} = \Omega_{,,}$ $\frac{av}{cv + q_{,,}} = \Omega_{,}$			
			223. Déterminer dans l'hypothèse du problème précédent, 1.° Les cas de stabilité *positive*, *nulle* ou *négative*; 2.° Les valeurs et les durées des oscillations autour de deux axes horizontaux passant par le centre d'inertie;
π = la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon.			

337. Les longueurs des pendules simples synchrones aux oscillations précédentes, sont

Longueur du pendule simple synchrone aux oscillations autour de l'axe........ des $x_{,,}$...... $\dfrac{\rho_{,,,}}{\pi\,(cv + q_{,})}$

des $y_{,,}$...... $\dfrac{\rho_{,,}}{\pi\,(v + q_{,,})}$.

Tous les résultats obtenus depuis l'art. 334 sont parfaitement conformes à ceux donnés art. 315 et suivans, en observant que l'on a employé les volumes dans les articles cités, et les poids dans ceux-ci; ce qui ne change absolument rien aux résultats numériques. Pour faire le rapprochement avec facilité, il faut supposer que le corps flottant est homogène, et observer que, πv étant le poids de ce corps, les momens d'inertie $\rho_{,,}$ et $\rho_{,,,}$, par rapport aux axes des y et des x, sont respectivement égaux à $K_{,}^{2}\pi v$ et $K_{,,}^{2}\pi v$, ce qui changera les formules des art. 334 et 337, en

$$\varphi = \Omega''\left\{1 - \cos.\left[t\sqrt{\left(\frac{g(cv + q_{,})}{K_{,,}^{2}v}\right)}\right]\right\}$$

$$\tau = \Omega'\left\{1 - \cos.\left[t\sqrt{\left(\frac{g(cv + q_{,,})}{K_{,}^{2}v}\right)}\right]\right\}$$

Longueur du pendule synchrone aux oscillations autour de l'axe........... des $x_{,,}$... $\dfrac{K_{,,}^{2}v}{cv + q_{,}}$

des $y_{,,}$... $\dfrac{K_{,}^{2}v}{cv + q_{,,}}$;

expressions qui sont composées de termes respectivement homogènes avec les termes correspondans des formules des art. 315 et 316.

338. Nous avons trouvé, art. 274, pour l'équation d'équilibre des fluides pesans,

$$gz = -\int\frac{dp}{K} + \text{constante.}$$

Si le fluide est élastique, et qu'on suppose toutes ses molécules à la même température, la densité k sera uniquement fonction de la pression p, et l'intégrale de la différentielle $\frac{dp}{k}$ aura toujours une valeur assignable, ou analytiquement, ou par les quadratures des courbes.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			3.° Les longueurs des pendules synchrones à ces oscillations.
$K_{,}^2$ et $K_{,,}^2$ sont les coëfficiens de la masse ou du poids total dans les évaluations des momens d'inertie par rapport aux axes des y et des x.			
$g =$ la force accélératrice de la pesanteur. $p =$ la pression, rapportée à l'unité de surface, qui a lieu dans une couche de niveau dont un des points est à l'extrémité de la coordonnée verticale z.			224. Trouver, dans l'hypothèse de la température constante, la relation entre les hauteurs du baromètre à deux points de l'atmosphère, et les différences de niveau de ces deux points.

Appliquons cette équation à l'air atmosphérique ; en conservant l'hypothèse de l'uniformité de la chaleur, la densité k sera sensiblement proportionnelle à la pression, et on aura

$$k = \frac{h'}{H} K;\ dp = gqdh',$$

ce qui changera l'équation précédente en

$$z = \text{constante} - \frac{q}{K} H \int \frac{dh'}{h'},$$

qui a pour intégrale, en observant que lorsque $z = 0$, $h = h'$,

$$z = \frac{q}{K} H (\log. h - \log. h').$$

339. Le rapport $\frac{q}{K}$ a été trouvé, par expérience, à peu-près $= \frac{13568}{1{,}2375}$, le thermomètre à mercure marquant 0,125 de l'intervalle entre la glace et l'eau bouillante, et $H = 0^{\text{mètre}},76$; d'où il résulte qu'en changeant les logarithmes hyperboliques en logarithmes de *Briggs*, ou en les divisant par 0,43429, la valeur de z peut, étant exprimée en mètres, prendre la forme

$$z = 20000 (\log. h - \log. h') \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

La valeur de $\frac{1}{n}$ diffère peu de 0,04 ; ainsi prenant les logarithmes avec sept décimales, on doublera leur différence, on avancera de quatre chiffres la virgule ou le point qui sépare la caractéristique, et on diminuera le résultat de sa 25.ᵉ partie.

340. L'hypothèse de la température constante dans toute la hauteur de z, est absolument démentie par l'expérience ; et on a reconnu que l'air se refroidissait graduellement à mesure qu'on s'élevait. Il faudrait donc, pour rendre la valeur de z conforme aux phénomènes, introduire dans cette valeur une fonction de la chaleur ; mais dans l'état actuel de la physique, cette fonction est tout-à-fait inconnue, quoiqu'on puisse néanmoins tirer quelque parti de ce que nous avons dit, art. 256, sur les rapports entre les températures et les volumes sous une pression déterminée. Avant de parler de l'application des formules données aux

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
k = la densité dans la même couche. q = la densité du mercure. H = la hauteur moyenne du baromètre au niveau de la mer. K = la densité de l'air au même niveau. h = la hauteur du baromètre à l'origine de z. h' = la hauteur du baromètre à l'extrémité de z ou dans la couche qui éprouve la pression p.		147. La température étant supposée constante, la différence de niveau entre deux points de l'atmosphère est proportionnelle à la différence des logarithmes des hauteurs du baromètre à ces deux points.	

articles cités, je vais exposer les moyens de correction qu'on a employés pour avoir égard à la variation de la température dans les mesures barométriques : ils peuvent se déduire du raisonnement suivant.

Imaginons deux baromètres comparables placés dans la même verticale, l'inférieur à l'origine, et le supérieur à l'extrémité de z; et même, pour assurer l'équilibre parfait de la colonne d'air dans laquelle ils se trouvent, que cette colonne soit enfermée dans un tube vertical qui contienne aussi les baromètres. Cela posé, si la température intérieure du tube était par-tout $= T$, la distance entre les baromètres serait

$$z = 20000\,(\log. h - \log. h')\,;$$

mais cette circonstance n'ayant pas lieu, on a pris la température moyenne $\frac{1}{2}(\tau + \tau')$ pour la température uniforme sur toute la hauteur; considérant alors, 1.° qu'un volume V à la température T, devient λV à la température $\frac{1}{2}(\tau + \tau')$; 2.° que sur une base donnée, les volumes sont comme les hauteurs, on a l'équation

$$z = 20000\,(\log. h - \log. h')\,(1 + \Omega).$$

Supposant ensuite que l'accroissement de volume ω devient double, triple, &c. lorsque T devient $T + 2$, $T + 3$, &c., et que la même proportionnalité a lieu dans les décroissemens de volume, lorsque T devient $T - 2$, $T - 3$, &c., on a

$$\Omega = \left\{\tfrac{1}{2}(\tau + \tau') - T\right\}\omega,$$

valeur qui, substituée dans l'équation précédente, donne

$$z = 20000\,(\log. h - \log. h')\left\{1 + \left[\tfrac{1}{2}(\tau + \tau') - T\right]\omega\right\}.$$

La toise étant l'unité linéaire, on a { suivant *Deluc*. . . . . $T = \frac{5}{4} \times 16{,}75 = 20{,}94$; $\omega = \frac{4}{5} \times \frac{1}{215} = \frac{1}{169}$
suivant *Trembley*. . . . $T = \frac{5}{4} \times 11{,}5 = 14{,}37$; $\omega = \frac{4}{5} \times \frac{1}{192} = \frac{1}{240}$

et la formule précédente, appliquée aux données de l'un et l'autre de ces deux physiciens, devient, lorsqu'on mesure en mètres,

d'après les données de { *Deluc* . . . $z = 20000(\log. h - \log. h')\left\{1 + \left[\frac{1}{2}(\tau + \tau') - 20{,}9\right]\frac{11}{269}\right\}\frac{\pi}{2}$
Trembley. . $z = 20000(\log. h - \log. h')\left\{1 + \left[\frac{1}{2}(\tau + \tau') - 14{,}4\right]\frac{1}{240}\right\}\frac{\pi}{2}$

341. En rapprochant les formules de l'article précédent, de ce que j'ai dit art. 249 et 250, on voit sur-le-champ que l'hypothèse de $\Omega = \left\{\frac{1}{2}(\tau + \tau') - T\right\}\omega$ doit nuire à leur exactitude; en ce

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
T = température à laquelle la formule $z = 20000\,(\log. h - \log. h')$ n'exige aucune correction. τ = température vers le thermomètre inférieur. τ' = température vers le thermomètre supérieur. T, τ et τ' sont des parties centésimales de la distance entre la glace et l'eau bouillante sur le thermomètre à mercure, distance qui est supposée = 100. $\Omega = \frac{\Delta V}{V}$, V étant le volume d'une masse d'air sous la pression $\frac{h + h'}{2}$, et à la température T, et ΔV étant l'accroissement de V, lorsque, la masse et la pression demeurant les mêmes, la température T devient $\frac{\tau + \tau'}{2}$. Cette quantité Ω est positive ou négative, suivant qu'on a $\frac{1}{2}(\tau + \tau') > T$ ou $\frac{1}{2}(\tau + \tau') < T$. ω = le rapport correspondant lorsque T devient $T + 1$. n = le nombre de mètres que contient une toise.			225. Résoudre le même problème, en ayant égard à la variation de température dans les différentes couches de l'atmosphère, 1.° En supposant que la *dilatabilité* de l'air est constante, c'est-à-dire que quel que soit la température acquise d'un volume V de ce fluide, un degré d'augmentation dans cette température change V en mV, m étant un coëfficient invariable. 2.° En ayant égard aux variations de la *dilatabilité* relatives aux différentes températures de

qu'elle suppose l'accroissement de volume proportionnel à l'accroissement de température, ce qui n'est pas conforme aux phénomènes : on sait *(articles cités)* que les fluides élastiques sont d'autant plus dilatables qu'ils sont plus dilatés.

Si la nature des fluides élastiques était telle, qu'en partant d'une température donnée t, et en élevant graduellement une même masse d'air aux températures t', t'', t''', &c., le tout sous une pression P, on avait (V étant le volume à la température t) les volumes successifs correspondans V', V'', V''', &c., tels que les rapports $\frac{V'}{V}$, $\frac{V''}{V}$, $\frac{V'''}{V}$, &c., fussent indépendans des valeurs particulières de P, il serait aisé d'introduire dans la formule

$$z = 20000\,(\log. h - \log. h')\,(1 + \Omega)$$

une fonction de la température propre à exprimer Ω : en effet, les expériences faites sous une pression représentée par la hauteur moyenne du baromètre au niveau de la mer, et qui, d'après cette supposition, pourraient s'appliquer à la hauteur $\frac{h + h'}{2}$, donneraient, art. 249,

$$\Omega = \frac{A\left(B^{\frac{1}{2}(\tau + \tau_{,}) - T} - 1\right) B^{T}}{A\left(B^{T} - 1\right) + 1} = \frac{A\left(B^{\frac{1}{2}(\tau + \tau')} - B^{T}\right)}{1 + A\left(B^{T} - 1\right)}$$

A et B représentent μ et $\varrho_{,}$ de l'article cité, et le calcul numérique de Ω est facile, au moyen des tables que j'ai données dans le Mémoire cité à la note de l'article 249.

342. Ω étant connu avant de déterminer z, il faut faire aux hauteurs h et h' des corrections relatives aux différentes densités du mercure à différentes températures, pour les ramener à une même densité. Il est convenable de prendre pour terme de comparaison des densités du mercure, celle de ce fluide lorsque l'air ambiant est à la température T; les augmentations de densité, depuis T jusqu'en τ et en τ', sont respectivement $\frac{\tau - T}{q}$ et $\frac{\tau' - T}{q}$, et il faut aux hauteurs h et h' substituer rh et $r'h'$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$\frac{1}{q}$ = ce dont la densité du mercure diminue, lorsque la température de l'air ambiant augmente de $\frac{1}{100}$ de l'intervalle entre la glace et l'eau bouillante, mesuré par le thermomètre à mercure. On suppose que q est sensiblement constant dans tout cet intervalle, ou du moins			l'air, l'expérience ayant prouvé que ce fluide est d'autant plus dilatable qu'il est déjà dilaté, c'est-à-dire, que m est plus grand à mesure que la température du volume V est plus élevée.

D'après toutes ces considérations, la valeur de z sera

$$z = 20000 \left[\log.(rh) - \log.(r'h') \right] \frac{1 + A(B^{\frac{1}{2}(\tau + \tau')} - 1)}{1 + A(B^{T} - 1)}.$$

On a adapté à quelques baromètres des échelles thermométriques, pour faciliter les corrections auxquelles les coèfficiens h et h' se rapportent.

343. Il résulte de tout ce qui a été dit depuis l'article 338, que la théorie physico-mathématique du baromètre, considéré comme instrument propre à mesurer les hauteurs, laisse encore beaucoup de choses à desirer. En effet, les corrections relatives à la température qu'on emploie ordinairement, supposent la *dilatabilité* constante, ce qui est contraire à l'expérience; et si, pour se rapprocher des phénomènes, on fait la *dilatabilité* fonction de la température, il reste encore à savoir si, après avoir trouvé la forme de cette fonction, les constantes qui y entrent, et qui conviennent à une certaine pression, conviendront à d'autres pressions qui différeraient sensiblement de celle-là, c'est-à-dire, si la *dilatabilité* n'est pas en général fonction de la température et de la pression. On n'a encore, que je sache, publié aucune expérience qui puisse éclaircir cette question, mais plusieurs autres circonstances physiques ajoutent encore aux incertitudes sur la vraie loi de la *dilatabilité*. Ce sont les différentes *capacités* de chaleur que plusieurs causes font varier dans l'air, et auxquelles il faudrait avoir égard dans les conséquences qu'on déduit de sa température; les différentes quantités d'eau qu'il tient en dissolution, quantités qui dépendent de sa pression et de sa température, et qui ont une grande influence sur la *dilatabilité* du composé; l'agitation de l'atmosphère, lors des observations, qui doit, même dans les espaces abrités du vent, rendre la densité et la pression différentes de ce qu'elles seraient si l'air était dans l'équilibre parfait que supposent les formules barométriques; la distance horizontale des stations qui peut empêcher les observations, même contemporaines, d'être comparables, parce que les colonnes d'air verticales qui agissent sur les baromètres, étant éloignées les unes des autres, peuvent ne pas se trouver dans le même état, &c., &c.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
depuis la glace jusqu'aux plus hautes et aux plus basses températures habituelles de l'atmosphère. $r = \frac{q - (\tau - T)}{q}$ $r' = \frac{r - (\tau' - T)}{q}$. r et r' sont plus petits ou plus grands que l'unité, suivant que τ et τ' sont plus grands ou plus petits que T.		148. Il reste encore beaucoup d'incertitudes sur la véritable loi de la dilatation de l'air, eu égard aux diverses circonstances physiques qui peuvent la modifier; cependant on peut tirer un parti utile de la fonction par laquelle on a exprimé la *dilatabilité* dans le problème 173, où, pour la première fois, on a eu égard à la variation de cette dilatabilité.	

Il reste encore les incertitudes des observations de h et h', c'est-à-dire, celles sur l'évaluation des différences de hauteur du mercure aux stations supérieure et inférieure ; mais d'après ce que je viens de dire, ces dernières causes d'erreurs sont peut-être celles qui altèrent le moins les résultats. On a, depuis quelques années, construit des baromètres extrêmement précis, parmi lesquels il faut distinguer ceux qui donnent le moyen d'évaluer la hauteur de la colonne élevée par son poids : la grande exactitude qu'ils peuvent donner, doit faire desirer que les physiciens et les mécaniciens s'occupent à les rendre commodes et usuels.

Je me suis un peu étendu sur la théorie barométrique, à cause de son importance, et parce qu'en offrant au lecteur le précis de tout ce qu'on a fait jusqu'à présent sur cette matière, je voulois y ajouter les nouvelles considérations relatives à la variation de la *dilatabilité* (art. 249, 250, 341 et 342), qui sont, je crois, présentées ici pour la première fois, et dont il me semble qu'on peut tirer un parti utile.

344. Je terminerai cette section par des recherches relatives aux corps qui jouissent de différens degrés de fluidité ; et pour donner à ces recherches plus d'utilité et d'intérêt, je les appliquerai à la poussée des terres contre les murs de revêtement.

Les résistances dues au *frottement* et à la *cohésion* qui entrent dans les formules des articles 345, 346, &c., se mesurent de la manière suivante. Supposez qu'un corps pesant est posé sur une surface plane horizontale, à laquelle il n'adhère point ; la puissance horizontale nécessaire pour le sortir de l'état de repos, s'il n'est pas en mouvement, ou pour empêcher que son mouvement ne soit retardé, s'il a déjà une vîtesse horizontale, cette puissance, dis-je, mesurera le *frottement* du corps sur la surface. J'entrerai par la suite dans de plus grands détails sur cet objet. La résistance de la *cohésion* est due à l'union des parties constituantes d'un même corps entre elles ; elle est égale à l'effort qu'il faut faire pour séparer ces parties ; effort que je supposerai proportionnel à la surface de rupture.

345. Si un corps pesant est posé sur un plan incliné, où il est retenu par une force horizontale, les conditions de l'équilibre seront,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	62. De la résistance due, 1.° Au frottement, 2.° A la cohésion.		
P = la puissance horizontale qui doit retenir le corps sur le plan incliné.			226. Trouver la force horizontale nécessaire pour tenir un corps pesant en

en ayant égard à la cohésion et au frottement, et en supposant que la résistance qu'oppose le frottement est proportionnelle à la pression,

1.° . . . $P = \dfrac{Q(1 + f\,\text{tang.}\,\sigma) + \gamma a : \cos.\sigma}{\text{tang.}\,\sigma - f}$ — dans le cas où la puissance P, surmontant le frottement et la cohésion, est prête à faire remonter le corps.

2.° . . . $P = \dfrac{Q(1 - f\,\text{tang.}\,\sigma) - \gamma a : \cos.\sigma}{\text{tang.}\,\sigma + f}$ — dans le cas où la puissance P, uniquement employée à empêcher le mouvement, a en sa faveur le frottement et la cohésioo.

346. Dans le second cas, la puissance P pourra être augmentée de toute quantité plus petite que

$$\frac{2\,(fQ + \gamma a \sin.\sigma)}{\sin.^2\sigma - f^2\cos.^2\sigma},$$

sans que le mouvement se produise, cette quantité étant la différence entre la première et la seconde valeur de P.

347. La seconde équation de l'art. 345, appliquée au cas de la poussée d'un mur de revêtement, dans l'hypothèse où le prisme de terre qui produit la poussée a trois faces planes, l'une verticale appliquée contre le mur de revêtement, l'autre horizontale qui est sa surface supérieure; et la troisième inclinée à l'horizon qui sépare ce prisme des terres inférieures; cette seconde équation, dis-je, donne pour la somme des poussés horizontales contre le mur d'un prisme quelconque qui tendrait à couler sur un angle $\sigma < \tau$, égal à l'angle formé par la verticale et par sa face inférieure, en observant que le poids de ce prisme $= \frac{1}{2}\pi h^2$ tang. σ,

$$P = (\tfrac{1}{2}\pi h^2 + \gamma h\,\text{tang.}\,\tau)\,\text{tang.}\,\sigma.\,\text{tang.}\,(\tau - \sigma) - \gamma h\,\text{tang.}\,\tau.$$

348. Il s'agit maintenant de déterminer quel est, parmi tous les prismes qui peuvent couler sur leur face inférieure, celui qui donne la plus grande poussée horizontale : différenciant la valeur de P par rapport à σ, et égalant la différentielle à zéro, on parvient à ce résultat, remarquable par sa simplicité, et qui n'avait encore été donné nulle part;

$\sigma = \frac{1}{2}\tau$ — le rapport f du frottement à la pression, est égal à cotang. τ,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
Q = le poids du corps qu'il s'agit de tenir en équilibre sur le plan incliné. σ = l'angle formé par le plan incliné et par la verticale. f = le rapport du frottement à la pression, ou la cotangente de l'angle formé par la verticale et par le plan sur lequel le corps commencerait à glisser. γ = la résistance de la cohésion sur l'unité de surface. a = la surface sur laquelle la cohésion a lieu.		149. Lorsqu'il s'agit d'empêcher le mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné, le frottement et la cohésion équivalent, pour favoriser cet effet, à une puissance horizontale $= \frac{2(fq + \gamma a \sin.\sigma)}{\sin.^2\sigma - f^2 \cos.^2\sigma}$.	équilibre sur un plan incliné, en ayant égard au frottement et à la cohésion, 1.° Dans le cas où la puissance, surmontant le frottement et la cohésion, est prête à faire remonter le corps; 2.° Dans le cas où la puissance, uniquement employée à empêcher le mouvement, a en sa faveur le frottement et la cohésion. 227. Trouver la puissance horizontale équivalente à la somme des pressions horizontales, contre le parement d'un mur de revêtement, exercée par un prisme de terre qui tend à couler sur une inclinaison quelconque plus petite que celle du talus naturel des terres.
P, σ et γ ont la même signification qu'à l'art. 345. h = la hauteur du mur de revêtement depuis sa base jusqu'au cordon ou à la surface supérieure du terrain. τ = l'angle formé par la verticale et par le plan qui sépare les terres qui tendent à couler, de celles qui n'y ont aucune tension, dans le		150. Le prisme de terre de plus grande poussée, est celui qui tend à glisser sur un plan incliné formant avec la verticale un angle égal à la moitié de celui que la même verticale fait avec la ligne du talus naturel des terres.	228. Trouver parmi tous les prismes de terre qui tendent à couler sur leur face inférieure, quel est celui qui produit la plus grande poussée, et donner la valeur de cette plus grande poussée.

d'où on déduit pour la valeur de la poussée horizontale à laquelle le mur doit résister,

$$P = (\tfrac{1}{2}\pi h^2 + \gamma h \,\text{tang.}\,\tau)\,\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\tau - \gamma h \,\text{tang.}\,\tau,$$

qui se change en

$$P = \tfrac{1}{2}\pi h^2 \,\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\tau - \gamma h \,\text{tang.}\,\tau\,(1 - \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\tau).$$

349. Cette expression ne contient plus que la quantité γ, qui ne soit pas donnée ou par l'état de la question, ou par l'expérience. Pour la déterminer, on fera la valeur précédente égale à zero, ce qui donnera

$$\tfrac{1}{2}\pi h_{,}\,\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\tau - \gamma\,\text{tang.}\,\tau\,(1 - \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\tau) = 0\,;$$

d'où . . . . . . $h_{,} = \dfrac{\gamma\,\text{tang.}\,\tau\,(1 - \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\tau)}{\frac{1}{2}\pi\,\text{tang.}^2 \frac{1}{2}\tau}$

et . . . . $\gamma = \dfrac{\frac{1}{2}\pi h'\,\text{tang.}^2 \frac{1}{2}\tau}{\text{tang.}\,\tau\,(1 - \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\tau)} = \frac{1}{4}\pi h_{,}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\tau.$

350. Cette valeur de γ, substituée dans l'équation de l'art. 347, la change en celle-ci,

$$P = \frac{\frac{1}{2}\pi h^2 \{[1 - (1 - m)\,\text{tang.}^2 \frac{1}{2}\tau]\,\text{tang.}\,\sigma\,\text{tang.}\,(\tau - \sigma) - m\,\text{tang.}^2 \frac{1}{2}\tau\}}{1 - \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\tau}.$$

351. Cette même valeur, substituée dans l'équation 348, donne l'expression très-simple,

$$P = \tfrac{1}{2}\pi h\,(h - h_{,})\,\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\tau$$

de la plus grande poussée, qui ne contient plus que des quantités données ou par l'état de la question, ou par l'expérience.

352. Pour trouver la somme des momens de toutes les poussées élémentaires sur la hauteur h, on a l'expression

$$\tfrac{1}{2}\pi h^2 (\tfrac{1}{3}h - \tfrac{1}{2}h_{,})\,\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\tau = \text{somme des momens}\,;$$

et au moyen des deux équations précédentes, on trouvera toujours les dimensions des murs de revêtement, dans l'hypothèse où ils peuvent glisser sur leur plate-forme de fondation, et dans celle où ils peuvent être renversés.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
cas où ces terres étant nouvellement remuées, la cohésion entre leurs parties est détruite.			
π = la pesanteur spécifique des terres. $h_{,}$ = la hauteur sur laquelle on peut fouiller les terres à pic, sans qu'elles s'éboulent, dans le cas où la cohésion entre leurs parties subsiste.			229. Trouver la valeur de la cohésion des terres, lorsqu'on connaît leur pesanteur spécifique, leur talus naturel et la plus grande hauteur sur laquelle on peut les creuser à pic sans qu'elles s'éboulent.
$m = \frac{h_{,}}{h}$.		151. La plus grande poussée horizontale a pour valeur $\frac{1}{2}\pi h(h - h_{,})\,\text{tang.}^2\,\frac{1}{2}\tau$, et son moment est égal à $\frac{1}{2}\pi h^2\left\{\frac{1}{3}h - \frac{1}{2}h_{,}\right\}\text{tang.}^2\,\frac{1}{2}\tau$.	230. Déterminer la somme des poussées horizontales, en quantités qui soient toutes données par l'état de la question ou par l'expérience.
			231. Déterminer le moment de la plus grande poussée horizontale par rapport à l'arête inférieure du parement extérieur du mur.

353. DANS l'hypothèse où le mur peut glisser sur sa plate-forme, on a pour l'épaisseur du mur au cordon, c'est-à-dire, à sa partie supérieure,

$$x = \frac{\frac{1}{2}\pi(h - h_{,})\,\text{tang.}^2\,\frac{1}{2}\tau}{\Pi q + r} - \frac{n + n'}{2}\,h.$$

354. DANS l'hypothèse où le mur peut être renversé, l'épaisseur au cordon se calcule par l'équation

$$x = \left[\frac{\pi}{\Pi}\,h\left(\tfrac{1}{3}h - \tfrac{1}{2}h_{,}\right)\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\tau + \left(\tfrac{1}{3}n^2 - \tfrac{1}{12}n_{,}^2\right)h^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left(n + \tfrac{1}{2}n_{,}\right)h.$$

Il faut bien observer que les valeurs de x, données dans cet article et dans le précédent, non-seulement sont différentes, mais encore dépendent de conditions absolument indépendantes.

355. LORSQUE les deux talus du mur sont égaux, la valeur de $x_{,,}$ devient

$$x = \left[\frac{\pi}{\Pi}\,h\left(\tfrac{1}{3}h - \tfrac{1}{2}h_{,}\right)\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\tau + \frac{n^2}{4}\,h^2\right]^{\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}\,n\,h.$$

356. SI on suppose que la cohésion est nulle, ou que $h_{,} = 0$, il viendra

$$x = h\left[\left(\tfrac{1}{3}\,\frac{\pi}{\Pi}\,\text{tang.}^2\,\frac{\tau}{2} + \frac{4n^2 - n_{,}^2}{12}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2n + n_{,}}{2}\right], \text{ les talus étant inégaux;}$$

$$x = h\left[\left(\tfrac{1}{3}\,\frac{\pi}{\Pi}\,\text{tang.}^2\,\frac{\tau}{2} + \frac{n^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}\,n\right], \text{ les talus étant égaux.}$$

357. LES quantités n^2 et $n_{,}^2$, qui sont ordinairement de petites fractions, peuvent se négliger sous le radical, ce qui simplifie les équations précédentes, et donne

$$x = h\left[\left(\frac{\pi}{3\,\Pi}\right)^{\frac{1}{2}}\text{tang.}\,\frac{\tau}{2} - \frac{2n + n_{,}}{2}\right], \text{ les talus étant inégaux;}$$

$$x = h\left[\left(\frac{\pi}{3\,\Pi}\right)^{\frac{1}{2}}\text{tang.}\,\frac{\tau}{2} - \tfrac{3}{2}\,n\right], \text{ les talus étant égaux.}$$

358. SI on divise, l'une par l'autre, les valeurs données art. 351 et 352, on aura

$$\frac{h\left(\frac{1}{3}h - \frac{1}{2}h_{,}\right)}{h - h'};$$

C'est la distance du pied du mur au point par où passe la résultante de toutes les pressions. Cette distance est égale à $\frac{1}{3}\,h$ lorsque la cohésion est nulle, quelle que soit d'ailleurs la valeur du frottement.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
x = l'épaisseur du mur au cordon. n et n' sont les talus de ces paremens intérieur et extérieur. Π = la pesanteur spécifique de la maçonnerie. q = le nombre par lequel il faut multiplier la pression verticale du mur sur le plan de sa base, pour avoir la résistance du frottement sur le plan de cette base. r = la force horizontale équivalente à la cohésion du mur sur une unité de surface de sa base.			232. Trouver l'épaisseur du mur au cordon, dans l'hypothèse du glissement sur la base. 233. Trouver l'épaisseur du mur au cordon, dans l'hypothèse du renversement. 234. Appliquer la solution du problème précédent, 1.° Au cas où les talus intérieurs et extérieurs sont égaux, 2.° Au cas où la cohésion est nulle.
		152. La direction de la résultante de toutes les poussées horizontales passe à une distance du pied du mur, égale à $\frac{h(\frac{1}{3}h - \frac{1}{2}h')}{h - h'}$, distance qui est toujours la même, quelle que soit la valeur du frottement.	235. Trouver à quelle distance du pied du mur passe la direction de la résultante de toutes les poussées horizontales, en ayant égard au frottement et à la cohésion.

359. Pour déduire le talus que les terres prennent naturellement lorsqu'il y a cohésion entre leurs parties, du talus qu'elles affectent lorsqu'elles sont nouvellement remuées et que la cohésion entre leurs parties est détruite, on a l'équation

$$(\tfrac{1}{2}\pi h^2 + \gamma h \text{ tang. } \tau) \text{ tang. } \sigma \text{ . tang. } (\tau - \sigma) - \gamma h \text{ tang. } \tau = 0.$$

On tire de cette équation, en substituant pour γ sa valeur $\frac{1}{4}\pi h_{\prime}$ tang. $\frac{1}{2}\tau$, ou en égalant à zéro le second membre de l'équation de l'article 350,

$$\text{tang. } \sigma = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\tau \left\{ 1 \pm \sqrt{\left[(1 - m)(1 + m \text{ tang.}^2 \frac{1}{2}\tau) \right]} \right\}}{1 - (1 - m) \text{ tang.}^2 \frac{1}{2}\tau},$$

qui fait voir que lorsque la cohésion entre les parties a lieu, la hauteur du talus influe sur son inclinaison, ou que l'angle du talus n'est pas le même sur toutes les hauteurs. Ce talus fait toujours avec la verticale un angle plus petit que τ et plus grand que $\frac{1}{2}\tau$; c'est-à-dire, que les limites de son inclinaison sont τ et $\frac{1}{2}\tau$; on a $\sigma = \tau$ lorsque $h =$ infini ou $m = 0$, et $\sigma = \frac{1}{2}\tau$ lorsque $h = h_{\prime}$ ou $m = 1$; mais comme, dans ce dernier cas, la valeur zéro de la poussée correspond à l'angle sous lequel cette poussée doit en général être un *maximum*, il s'ensuit que, lorsque $h = h_{\prime}$, la poussée est zéro non-seulement sous l'angle $\frac{1}{2}\tau$, mais encore sous tous les angles possibles : cette conséquence, tirée de l'équation précédente, est évidente d'ailleurs, puisque $h_{\prime}$ est la hauteur sur laquelle on peut fouiller le terrain à pic sans qu'il s'éboule.

360. Les formules données depuis l'art. 344 embrassent, comme on voit, tous les degrés de ténacité des terres, depuis la dureté jusqu'à la fluidité parfaite. En effet, si on prend la première de ces limites en faisant $h_{\prime} = \infty$ et $\tau = 0$, et qu'on observe qu'alors tang.^{2} $(\frac{1}{2}\tau)$ est du second ordre, les valeurs données art. 351, 352 deviendront nulles, parce que, dans ce cas, il n'y a point de poussée.

La seconde limite donne, en faisant $h_{\prime} = 0$ et $\tau = \frac{1}{4}$ *circon.*

Poussée horizontale. . . . . $= \frac{1}{2}\pi h^2$,

Somme des momens de la poussée. . . $= \frac{1}{6}\pi h^3$,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			236. Trouver la relation entre le talus que les terres prennent naturellement, lorsqu'il y a cohésion entre leurs parties et le talus qu'elles affectent lorsqu'elles sont nouvellement remuées, ou que la cohésion entre leurs parties est détruite.
$m = \frac{h_{,}}{k}$,		153. Lorsque la cohésion des terres n'est pas détruite, la hauteur de leur talus influe sur son inclinaison. Cette inclinaison, rapportée à la ligne verticale, est toujours plus petite que l'angle du talus naturel des terres, et plus grande que la moitié de cet angle; elle parvient à la première limite lorsque la hauteur du talus est infinie, et à la seconde lorsque la hauteur du talus approche de celle sous laquelle on peut creuser les terres à pic sans qu'elles s'éboulent.	
			237. Trouver ce que donnent les formules de la poussée dans les cas extrêmes de la dureté et de la fluidité parfaites.

Distance, à la base, du point d'application de la résultante . . . . . $= \frac{1}{3} h$,

Epaisseur au cordon pour résister au glissement . . . . $= h\left(\frac{\frac{1}{2}\pi}{\Pi q + r} - n\right)$,

Épaisseur au cordon pour résister au renversement . . . . $= h\left[-\frac{3}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\frac{\pi}{\Pi} + \frac{1}{4}n^2\right)}\right]$,

valeurs qui sont précisément les mêmes que celles qui auraient lieu, pour un fluide de même pesanteur spécifique que les terres.

361. Les formules des articles précédens offrent une solution du problème de la poussée des terres, plus complète que celles qu'on avait publiées jusqu'à présent, et à laquelle je suis parvenu au moyen du nouveau théorème n.° 348, qui fournit une expression aussi curieuse que simple de l'angle de la plus grande poussée. Pour faciliter le moyen de comparer mes formules avec celles ou les équivalentes à celles dont les ingénieurs se servent le plus communément dans les calculs des épaisseurs des murs de revêtement, je vais donner ici ces dernières formules, et exposer succinctement les considérations sur lesquelles on peut les établir.

Si on envisage le prisme de terre, qui tend à se séparer et à glisser, comme un corps de forme invariable dont le poids $= \frac{1}{2} \pi h^2$ tang. τ, et qu'il s'agit de retenir sur un plan incliné au moyen d'une puissance horizontale, en considérant la pression perpendiculaire au plan incliné comme une seconde puissance que j'appellerai *puissance normale,* qui se compose avec la première que je nommerai *puissance horizontale,* la question peut être envisagée sous deux points de vue :

1.° Les puissances *horizontale* et *normale* peuvent être restreintes à empêcher que le corps prismatique n'ait un mouvement horizontal ; alors la puissance horizontale a pour valeur $\frac{1}{2} h^2$ sin.^{2} τ, et il reste une puissance verticale qui n'est pas détruite, qui est égale à $\frac{1}{2} \pi h^2$ sin. τ cos. τ, ou à $\frac{1}{4} \pi h^2$ sin. (2τ), et qu'on néglige parce qu'elle n'a aucun effet horizontal.

Cette considération donne

$$x = h\left[-\frac{3}{2}n \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\frac{\pi}{\Pi} \sin.^2 \tau + \frac{1}{4}n^2\right)}\right];$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		154. Dans le cas où le frottement et la cohésion sont supposés nuls, les formules des art. 351, 352 et 358 donnent pour la somme des poussées horizontales, la somme de leurs momens, et la distance à la base du point d'application de la résultante respectivement, $\frac{1}{2}\pi h^2$, $\frac{1}{6}\pi h^3$ et $\frac{1}{2} h$, comme pour les fluides.	238. Exposer les considérations sur lesquelles on peut établir les formules de la poussée des terres employées le plus communément.
			239. Appliquer les considérations précédentes à la détermination de l'épaisseur des murs de revêtement, en faisant abstraction du frottement.

cette valeur ne diffère de celle de l'article 356 que par la substitution de $\sin.^2 \tau$ à $\text{tang.}^2 \frac{1}{2} \tau$; elle donne, par conséquent, des dimensions plus fortes, et peut, sans inconvénient, être employée dans la pratique ;

2.° Les puissances *horizontale* et *normale* peuvent être telles, qu'elles tiennent le centre d'inertie du prisme, ou toute la masse de terre qui pousse, dans un état d'équilibre absolu ; alors la *puissance horizontale* est égale à $\frac{1}{2} \pi h^2$; elle ne dépend que de la hauteur du mur et nullement du talus des terres ; la *puissance normale* $= \frac{\frac{1}{2} \pi h^2}{\cos. \tau}$, et on a

$$x = h\left[-\tfrac{3}{2} n \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{3} \frac{\pi}{\Pi} + \tfrac{1}{4} n^2\right)}\right],$$

équation qui est précisément la même que celle trouvée dans l'article précédent pour le cas de la fluidité : elle donne le *maximum* d'épaisseur, et il sera prudent de l'employer dans les cas où les terres, sujettes à être délayées, pourront être réduites, par les infiltrations de l'eau, à un état qui approche de la fluidité parfaite.

Je n'ai point parlé du frottement des terres contre le parement intérieur des murs de revêtement, et de quelques autres circonstances qui tendent à diminuer l'effet de la poussée ; leur considération était inutile à l'objet que j'avais en vue, et d'ailleurs la solidité exige qu'on n'y ait aucun égard dans la pratique.

FIN de l'Hydrostatique.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		155. L'application de la solution du second cas du problème 238 à la détermination de la force des murs de revêtement, donne des épaisseurs indépendantes de l'angle naturel du talus des terres, et seulement proportionnelles à la hauteur du mur. Ces épaisseurs sont égales à celles qu'on trouverait dans le cas où le mur aurait à soutenir la poussée d'un fluide de même pesanteur spécifique que les terres.	

SECONDE SECTION.

HYDRODYNAMIQUE.

362. L'HYDRODYNAMIQUE est la partie de la mécanique des fluides qui fait entrer le temps en considération, et a pour objet l'action des puissances sur les molécules fluides, de laquelle il résulte un mouvement.

363. SI on rapporte la position d'une molécule quelconque d'un fluide en mouvement à trois plans coordonnés, les quantités à considérer dans la détermination des phénomènes de ce mouvement sont,

Premièrement, les quantités données; savoir, 1.° la nature du fluide, de laquelle dérive une certaine relation entre la densité, la chaleur et la pression; 2.° les puissances appliquées à la molécule, puissances que nous supposerons connues en quantité et en direction;

Secondement, les quantités inconnues; savoir, 1.° la vîtesse de la molécule, 2.° la direction de son mouvement, 3.° sa pression, 4.° sa densité.

La connaissance de la direction comporte la détermination de deux quantités: ainsi voilà cinq inconnues qui exigent qu'on ait un nombre égal d'équations.

Mais on peut, à la vîtesse et à la direction, substituer les trois vîtesses parallèles aux trois axes coordonnés; ainsi les cinq inconnues sont, en dernier résultat, trois *vîtesses* respectivement parallèles aux axes des x, y et z, la *pression* et la *densité*.

364. CES inconnues doivent être exprimées en fonctions de x, y et z, et du temps t. S'il s'agit, par exemple, de la densité k, on a

$$k = \text{fonction } (x, y, z, t),$$

et

$$dk = \left(\frac{dk}{dx}\right) dx + \left(\frac{dk}{dy}\right) dy + \left(\frac{dk}{dz}\right) dz + \left(\frac{dk}{dt}\right) dt,$$

et dx, dy, dz se rapportant à l'espace parcouru par la molécule qui

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	63. De l'hydrodynamique.		
			240. Assigner les quantités qui constituent les *inconnues* et les *données* dans les problèmes relatifs au mouvement des fluides.
t = le temps. k et p sont respectivement la densité et la pression, au bout du temps t, de la molécule qui a x, y et z pour coordonnées. u, v et w sont respectivement, au bout du temps t, les vîtesses parallèles aux x, y et z de la molécule qui a x, y et z pour coordonnées.		156. La nature du fluide et les puissances qui agissent sur lui étant données, les inconnues des problèmes relatifs au mouvement sont les trois vîtesses parallèles aux axes des x, y et z, la *pression* et la *densité*.	241. Trouver une équation qui donne à un instant quelconque la relation entre la densité et les trois vîtesses parallèles aux axes coordonnés.

a x, y et z pour coordonnées, on a

$$dx = udt, \; dy = vdt, \; dz = wdt;$$

ce qui change l'équation précédente en

$$\frac{dk}{dt} = \left(\frac{dk}{dx}\right)u + \left(\frac{dk}{dy}\right)v + \left(\frac{dk}{dz}\right)w + \left(\frac{dk}{dt}\right);$$

d'un autre côté, en comparant les densités de la molécule au commencement et à la fin de l'instant dt, c'est-à-dire, dans les deux positions successives où ses coordonnées sont, 1.° x, y et z; 2.° $x + dx$, $y + dy$ et $z + dz$, ou $x + udt$, $y + vdt$ et $z + wdt$, on trouve

$$\frac{dk}{dt} = -k\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right)\right];$$

et ces deux valeurs de $\frac{dk}{dt}$, égalées entre elles, donnent

$$365 \ldots \left(\frac{d.ku}{dx}\right) + \left(\frac{d.kv}{dy}\right) + \left(\frac{d.kw}{dz}\right) + \left(\frac{dk}{dt}\right) = 0.$$

366. Lorsque le fluide est incompressible, cette équation devient, en faisant k = constante,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0;$$

équation qui, parmi une infinité de cas où elle peut avoir lieu, est satisfaite par la condition que u, v et w sont respectivement indépendantes de x, y et z; ce qui donne

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0, \; \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0 \text{ et } \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0.$$

367. Les vîtesses u, v et w étant, comme la densité et la pression, fonctions de x, y, z et t, on a

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz + \left(\frac{du}{dt}\right)dt,$$

$$dv = \left(\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)dy + \left(\frac{dv}{dz}\right)dz + \left(\frac{dv}{dt}\right)dt,$$

$$dw = \left(\frac{dw}{dx}\right)dx + \left(\frac{dw}{dy}\right)dy + \left(\frac{dw}{dz}\right)dz + \left(\frac{dw}{dt}\right)dt;$$

ou en mettant, comme à l'article 364, udt, vdt et wdt, au lieu

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		157. L'équation donnée par la solution du problème 242 est satisfaite par la condition que *u*, *v* et *w* sont respectivement indépendantes de *x*, *y* et *z*.	242. Trouver ce que devient l'équation demandée par le problème précédent, lorsque le fluide est incompressible.
			243. Trouver les variations instantanées des trois vîtesses parallèles aux axes coordonnés.

de dx, dy et dz,

Forces accélératrices qui ont effectivement lieu parallélement aux axes des..........

$$\left\{\begin{array}{l} x \ldots \frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{dx}\right)u + \left(\frac{du}{dy}\right)v + \left(\frac{du}{dz}\right)w + \left(\frac{du}{dt}\right), \\ y \ldots \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right)u + \left(\frac{dv}{dy}\right)v + \left(\frac{dv}{dz}\right)w + \left(\frac{dv}{dt}\right). \\ z \ldots \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dx}\right)u + \left(\frac{dw}{dy}\right)v + \left(\frac{dw}{dz}\right)w + \left(\frac{dw}{dt}\right). \end{array}\right.$$

Voilà l'expression des forces accélératrices qui ont effectivement lieu parallélement aux axes des x, y et z; et on peut remarquer que l'incrément de chacune des trois vîtesses dépend des deux autres vîtesses.

D'un autre côté, on trouve, en combinant les actions des puissances appliquées à la molécule, avec les pressions que cette molécule éprouve de la part du fluide ambiant, que les forces accélératrices imprimées cette molécule sont,

Forces accélératrices imprimées par l'action combinée des puisances et des pressions parallélement aux axes des........................

$$\left\{\begin{array}{l} x \ldots g\left[X - \frac{1}{k}\left(\frac{dp}{dx}\right)\right], \\ y \ldots g\left[Y - \frac{1}{k}\left(\frac{dp}{dy}\right)\right], \\ z \ldots g\left[Z - \frac{1}{k}\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]. \end{array}\right.$$

368. Égalant les forces accélératrices imprimées à celles qui ont lieu, il vient

$$\left[X - \frac{1}{k}\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]g = \left(\frac{du}{dx}\right)u + \left(\frac{du}{dy}\right)v + \left(\frac{du}{dz}\right)w + \left(\frac{du}{dt}\right),$$

$$\left[Y - \frac{1}{k}\left(\frac{dp}{dy}\right)\right]g = \left(\frac{dv}{dx}\right)u + \left(\frac{dv}{dy}\right)v + \left(\frac{dv}{dz}\right)w + \left(\frac{dv}{dt}\right),$$

$$\left[Z - \frac{1}{k}\left(\frac{dp}{dz}\right)\right]g = \left(\frac{dw}{dx}\right)u + \left(\frac{dw}{dy}\right)u + \left(\frac{dw}{dz}\right)w + \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

369. Ces trois équations, celle de l'art. 365, ou de l'art. 366 (si le fluide est incompressible), et l'équation qui doit être donnée par la nature du fluide, entre la pression, la température, &c., forment les cinq équations qui, supposées intégrées, donneraient, en fonctions finies de x, y, z et t, les valeurs des cinq inconnues u, v, w, k et p.

Il est important, dans les applications, de se faire une idée exacte

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
g = la force accélératrice de la pesanteur terrestre.			
X, Y et Z sont des nombres abstraits, constans ou variables, tels que les produits gX, gY, gZ sont respectivement égaux aux forces accélératrices qui, si la molécule qui a x, y et z pour coordonnées, était parfaitement libre, seraient imprimées à cette molécule, à l'instant qui termine le temps t et en vertu des puissances qui la sollicitent, parallèlement aux axes des x, y et z.			244. Trouver les trois forces accélératrices qui animent une molécule fluide, parallèlement aux axes coordonnés, en combinant les puissances qui lui sont appliquées avec la pression qu'elle éprouve.
			245. Trouver trois équations qui, supposées intégrées, donneraient, à un instant quelconque, les relations entre les trois vîtesses parallèles aux coordonnées et la pression.
		158. Les trois équations données par la solution du problème 245, celle donnée par la solution du problème 241, et celle qui se rapporte à	

de la correspondance qu'il y a entre les variations de x, y, z et t, et celles correspondantes d'une quantité qui serait fonction de ces variables. Ainsi, soit

$$\Phi = \text{fonction}\,(x,\ y,\ z,\ t):$$

on peut supposer t constant et faire varier x, y, et z, soit partiellement, soit toutes ensemble. Dans ce cas, on compare les diverses valeurs contemporaines de Φ, qui, à un instant déterminé, répondent à différens points du système fluide, et appartiennent à différentes molécules placées à ces points au même instant.

On peut, au contraire, supposer x, y et z constans et faire varier t : dans ce cas, on considère les valeurs de Φ appartenant aux diverses molécules qui, dans plusieurs instans successifs, passent par un même point qui a x, y et z pour coordonnées.

Enfin, si on fait varier x, y et z (soit partiellement, soit toutes ensemble) et t, on obtient les valeurs de Φ appartenant à une même molécule, et qui changent à mesure que cette molécule passe, dans des instans successifs, d'un point à l'autre du système.

370. Reprenant les équations de l'art. 368, et faisant

$$\left(\frac{du}{dx}\right)u + \left(\frac{du}{dy}\right)v + \left(\frac{du}{dz}\right)w + \left(\frac{du}{dt}\right) = U,$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)u + \left(\frac{dv}{dy}\right)v + \left(\frac{dv}{dz}\right)w + \left(\frac{dv}{dt}\right) = V,$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)u + \left(\frac{dw}{dy}\right)v + \left(\frac{dw}{dz}\right)w + \left(\frac{dw}{dt}\right) = W,$$

on trouve, en multipliant les équations susmentionnées respectivement par δx, δy et δz, et prenant leur somme,

$$\frac{g\,\delta p}{k} = g(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - (U\delta x + V\delta y + W\delta z);$$

équation dans laquelle la différentielle δp n'est prise que par rapport à x, y et z, c'est-à-dire, dans l'hypothèse où le temps serait constant; ce qui donne $\left(\frac{dp}{dt}\right) = 0$.

Cette équation équivaut aux trois de l'art. 368, parce que δx, δy et δz se rapportent à deux points différens du système, qui, à cela près

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
N.a Les variations de p, x, y et z sont désignées par δ au lieu de d, parce qu'il s'agit ici des différences contemporaines de densité et de position de deux molécules infiniment voisines, pour distinguer de pareilles différences de celles qui se rapportent à une même molécule dans les instans successifs de son mouvement.		la relation entre la densité et la température du fluide, forment cinq équations qui, supposées intégrées, fourniraient toutes les déterminations relatives au mouvement des fluides.	246. Déterminer la correspondance qui existe entre les variations de x, y, z et t, et les variations, totales ou partielles, d'une quantité Φ qui serait fonction de x, y, z et t. 247. Trouver une équation unique qui remplace les trois équations données par la solution du problème 245.

qu'ils doivent être infiniment voisins, peuvent d'ailleurs avoir, l'un par rapport à l'autre, une position quelconque, et qu'ainsi les rapports de ces incrémens δx, δy et δz, sont tout-à-fait arbitraires. Il faut, d'après cette indépendance, que les coëfficiens de δx, δy et δz soient séparément égaux à zéro dans l'équation précédente; ce qui, en observant que $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ a été supposé nul, ou qu'on a simplement $\delta p = \left(\frac{dp}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dp}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dp}{dz}\right)\delta z$, redonne les trois équations citées.

371. J'ajouterai à cette observation une remarque qui pourra être utile aux commençans. Soit l'équation $\Phi =$ fonction (x, y, z, t), les incrémens de x, y et z peuvent se rapporter ou aux positions respectives et contemporaines de deux points infiniment voisins du système, à une époque donnée, ou à l'espace parcouru par une même molécule, pendant l'instant dt: dans le second cas, ces incrémens ont pour valeurs particulières udt, vdt et wdt respectivement; mais les coëfficiens partiels $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)$, $\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)$ sont toujours les mêmes dans l'un et l'autre cas; ce sont des fonctions finies qui dépendent uniquement du choix de l'indéterminée qu'on fait varier, ou de la *direction* dans laquelle on considère la variation, et sur lesquelles la valeur particulière de l'incrément qui résulte de cette variation (pourvu qu'on le suppose infiniment petit) n'influe en aucune manière.

372. Toute la théorie du mouvement des fluides est donc contenue dans les deux équations suivantes, auxquelles il faut ajouter celle relative au rapport entre la température et la densité.

$$(A) \ldots\ldots \left(\frac{d.ku}{dx}\right) + \left(\frac{d.kv}{dy}\right) + \left(\frac{d.kw}{dz}\right) + \left(\frac{dk}{dt}\right) = 0,$$

$$(B) \ldots\ldots \frac{g\delta p}{k} = g(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - (U\delta x + V\delta y + W\delta z),$$

en observant que dans le cas des fluides incompressibles, l'équation (A), qu'on peut appeler équation de *continuité*, devient

$$(C) \ldots\ldots \left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		159. Φ étant fonction de x, y, z et t, les coëfficiens différentiels $\left(\frac{d\,\Phi}{d\,x}\right)$, $\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)$, $\frac{d\Phi}{dz}$) ont les mêmes valeurs, soit que les variations de x, y et z se rapportent aux positions successives d'une même molécule, soit qu'elles se rapportent à la différence de position de deux molécules infiniment voisines.	
			248. Récapituler les équations qui donnent tous les phénomènes du mouvement des fluides.
	64. De l'équation de *continuité* dans le mouvement des fluides.		

et que, dans l'équation (B), δp ne renferme pas le terme $\left(\frac{dp}{dt}\right) dt$, cette différentielle n'étant prise que par rapport à x, y et z, ou remplaçant dans l'équation (B) la somme des trois différences partielles $\left(\frac{dp}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dp}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dp}{dz}\right)\delta z$; ce qui indique la différence des pressions contemporaines qui ont lieu à deux points infiniment voisins.

373. L'ÉQUATION (A) de l'article précédent est susceptible d'une intégration complète. En effet, si on prend trois fonctions arbitraires de x, y, z et t, et qu'on désigne ces fonctions respectivement par F, G et H, on satisfera à cette équation (A) de la manière la plus générale, en y substituant pour ku, kv, kw et k les valeurs suivantes, que je ne donne que comme exercices d'analyse, parce que j'emploîrai bientôt l'équation de *continuité* sous une forme beaucoup plus simple.

$$ku = \begin{cases} \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) \\ - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) - \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + f(y, z, t) \end{cases}$$

$$kv = \begin{cases} - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) \\ + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) + ff(x, z, t) \end{cases}$$

$$kw = \begin{cases} \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) \\ - \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + fff(x, y, t) \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) \\ + \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right) + \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right) + ffff(x, y, z) \end{cases}$$

374. L'ÉQUATION (C) du même article 372, est aussi satisfaite de la manière la plus générale, en y donnant à u, v et w les valeurs suivantes;

$$u = \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) + f(y, z, t)$$

$$v = \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) + ff(x, z, t)$$

$$w = \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) + fff(x, y, t).$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			249. Intégrer l'équation nommée *équation de continuité*, 1.° Dans le cas des fluides élastiques,
F, G et H sont des fonctions arbitraires de x, y, z et t. Les signes f, ff, fff et $ffff$ sont des signes de fonction, en observant que ff, fff, &c., ne désignent pas des fonctions de fonctions, mais qu'on double, triple, &c., la lettre f, seulement pour désigner des fonctions différentes.			
			2.° Dans le cas des fluides incompressibles.

On fait entrer le temps dans ces valeurs de u, v et w, quoique (C) ne soit qu'entre les trois variables x, y et z; mais t est considéré comme une constante, parce que, pour satisfaire à l'équation (C) au moyen des trois précédentes, il faut, dans la 1.re, 2.e et 3.e, faire respectivement,

$$\left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{du}{dz}\right), \left(\frac{du}{dt}\right); \left(\frac{dv}{dx}\right), \left(\frac{dv}{dz}\right), \left(\frac{dv}{dt}\right); \left(\frac{dw}{dx}\right), \left(\frac{dw}{dy}\right), \left(\frac{dw}{dt}\right)$$

égaux à zéro.

375. Les intégrales des deux articles précédens sont, ainsi que j'en ai prévenu, plutôt utiles comme exercices d'analyse que comme applicables à la solution des problèmes d'hydraulique. Avant de donner à l'équation de *continuité* la forme la plus simple dont elle est susceptible, il est bon de faire quelques observations sur les équations de l'art. 372. D'abord si on suppose les vîtesses nulles, on aura

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0.$$

Ces équations se réduisent à

$$\left(\frac{dk}{dt}\right) = 0; \quad \frac{\delta p}{k} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z:$$

la première exprime que la densité ne peut varier qu'avec le lieu, ou avec x, y et z, et nullement avec le temps; la seconde est l'équation de l'équilibre des fluides, donnée art. 264.

376. On voit que l'expression $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$, qui est (dans le sens de la définition 21) la somme des *momens* des puissances appliquées à la molécule, dont les coordonnées sont x, y et z, que cette expression, dis-je, doit être une fonction différentielle intégrable par elle-même, indépendamment de toute relation particulière entre x, y et z; et c'est ce qui a lieu dans les cas que présente la nature.

Ainsi, dans le cas des fluides incompressibles, l'équation (B), art. 372, deviendra

$$\frac{gp}{k} = gS - T + f(t)$$

La fonction arbitraire $f(t)$ vient de ce que dp est une différentielle prise par rapport à x, y et z seulement, art. 370;

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			250. Déduire l'équation de l'équilibre des fluides de celles du mouvement.
		160. L'expression $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ doit être intégrable par elle-même, ainsi qu'on l'a déjà dit art. 265.	
$\int(Xdx + Ydy + Zdz) = S$ $\int(Udx + Vdy + Wdz) = T.$			251. Assigner les conditions qui rendent intégrable celle des équations du mouvement des fluides incompressibles, qui donne la relation entre la pression et les vîtesses parallèles aux axes coordonnés.

mais pour que T soit une quantité assignable, il faut qu'on aît

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)=\left(\frac{dV}{dx}\right);\ \left(\frac{dU}{dz}\right)=\left(\frac{dW}{dx}\right);\ \left(\frac{dV}{dz}\right)=\left(\frac{dW}{dy}\right)$$ deux de ces équations donnent la troisième ;

et que les fonctions arbitraires F et G qui, art. 374, entrent dans les valeurs de u, v et w, soient telles que ces équations de condition aient lieu. Or, l'intégration de l'équation (C), art. 372, qui a fourni les trois équations de l'art. 374, ne donne pas la plus légère facilité pour déterminer F et G de manière à rendre $Udx + Vdy + Wdz$ intégrable.

377. L'équation d'équilibre $\frac{\delta p}{k} = P\delta x + Q\delta y + R\delta z$, considérée comme déduite des équations du mouvement, fournit un résultat singulier, en ce qu'elle conduit à l'intégrale

$$p = kS + f(t),$$

le fluide étant supposé incompressible. On voit que dans le cas de l'équilibre il entre une fonction arbitraire du temps dans la valeur de la pression ; mais, avec la plus légère réflexion, on se rend aisément raison de cette conséquence paradoxale. En effet, si un fluide incompressible en équilibre remplit entièrement la capacité intérieure d'un vase (qu'on peut supposer de forme invariable), il est évident qu'un piston adapté à un orifice pratiqué à ce vase, peut, à des époques successives quelconques, exercer sur le fluide des efforts quelconques, et changer ainsi les pressions que les parties de ce fluide exercent les unes sur les autres sans détruire l'équilibre.

378. Voici maintenant une autre manière de parvenir à des équations générales propres à représenter les phénomènes du mouvement des fluides, ou à tenir lieu des équations de l'art. 372. J'observe d'abord qu'à un instant quelconque du mouvement, les positions respectives, les pressions et les densités des molécules du système fluide, dépendent des positions respectives des pressions et des densités qu'elles avaient à une époque déterminée du mouvement et du temps qui s'est écoulé depuis cette époque. On a donc

$$x = f(a,b,c,t);\ y = ff(a,b,c,t);\ z = fff(a,b,c,t).$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		161. La valeur générale de la pression dans le cas de l'équilibre des fluides incompressibles, renferme une fonction arbitraire du temps.	
a, b et c sont les coordonnées initiales, parallèles respectivement aux x, y et z de la molécule qui, au bout du temps t, a les coordonnées x, y et z. f, ff, fff sont, comme à l'art. 373, des signes de fonction.		162. A un instant quelconque du mouvement, les positions respectives, les pressions et les densités des molécules d'un fluide dépendent des positions respectives des pressions et des densités qu'avaient ces molécules à une époque déterminée du mouvement et du temps qui s'est écoulé depuis cette époque.	

La pression p et la densité k, au bout du temps, qui, en général, sont fonctions des x, y, z et t (art. 364), sont par conséquent aussi fonctions de a, b, c et t.

379. LORSQU'ON considère le mouvement d'une même molécule pendant l'instant dt, les valeurs de dx, dy et dz, tirées des équations de l'article précédent, doivent être prises en ne faisant varier que le temps, puisque a, b et c sont constantes par rapport à une molécule considérée isolément.

Mais s'il s'agit de comparer les positions respectives de deux molécules à un instant déterminé, alors il faut considérer le temps comme constant, et faire varier a, b et c; ce qui donne, en se servant du signe de variation δ, pour indiquer qu'il ne s'agit pas d'un espace parcouru, mais des incrémens des coordonnées lorsqu'on passe d'un point du système à un autre point pris arbitrairement et infiniment près du premier, en considérant les situations contemporaines de ces deux points :

$$(A)\ldots\left\{\begin{aligned}\delta x &= \left(\frac{dx}{da}\right)\delta a + \left(\frac{dx}{db}\right)\delta b + \left(\frac{dx}{dc}\right)\delta c\\ \delta y &= \left(\frac{dy}{da}\right)\delta a + \left(\frac{dy}{db}\right)\delta b + \left(\frac{dy}{dc}\right)\delta c\\ \delta z &= \left(\frac{dz}{da}\right)\delta a + \left(\frac{dz}{db}\right)\delta b + \left(\frac{dz}{dc}\right)\delta c\end{aligned}\right.$$

Il ne faut pas perdre de vue que les coëfficiens $\left(\frac{dx}{da}\right)$, $\left(\frac{dx}{db}\right)$, &c. ont des valeurs qui sont données uniquement par les fonctions différenciées, et qui ne dépendent en aucune manière de celles des variations δa, δb, δc. *Voy.* l'art. 371.

380. Si on suppose, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) + \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\\ -&\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)\end{aligned}\right\} = G,$$

on déduira des trois équations de l'article précédent,

$$\delta a = \frac{1}{G}\left\{\begin{aligned}&+\left[\ \ \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\right]\delta x\\ &+\left[-\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) + \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right]\delta y\\ &+\left[\ \ \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right]\delta z\end{aligned}\right\}$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			252. Considérant les positions contemporaines de deux molécules infiniment voisines, trouver les variations de x, y et z en fonctions des variations des coordonnées primitives.
			253. Résoudre le problème inverse du précédent.

$$\delta b = \frac{1}{G}\left\{\begin{array}{l} +\left[\quad\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)\right]\delta x \\ +\left[\quad\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right]\delta y \\ +\left[-\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right]\delta z \end{array}\right\}$$

$$\delta c = \frac{1}{G}\left\{\begin{array}{l} +\left[-\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{da}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)\right]\delta x \\ +\left[\quad\left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)\right]\delta y \\ +\left[\quad\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)\right]\delta z \end{array}\right\}$$

381. On a pareillement pour les différences, qui ont lieu au même instant, entre les densités et les pressions de deux molécules infiniment voisines,

$$\delta k = \left(\frac{dk}{da}\right)\delta a + \left(\frac{dk}{db}\right)\delta b + \left(\frac{dk}{dc}\right)\delta c$$

$$dp = \left(\frac{dp}{da}\right)\delta a + \left(\frac{dp}{db}\right)\delta b + \left(\frac{dp}{dc}\right)\delta c,$$

en supposant le temps constant, puisqu'on considère des densités et des pressions contemporaines.

382. Les fonctions de a, b, c et t qui, art. 378, donnent les valeurs de x, y, z, p et k, doivent être telles que si on fait $t = 0$, elles donnent

$$x = a;\ y = b;\ z = c;\ p = p_{(0)};\ k = k_{(0)}$$

$$\delta x = \delta a;\ \delta y = \delta b;\ \delta z = \delta c;\ \delta p = \delta p_{(0)};\ \delta k = \delta k_{(0)},$$

les équations de l'art. 379 étant alors satisfaites par les valeurs

$$\left(\frac{dx}{da}\right) = 1;\ \left(\frac{dx}{db}\right) = 0;\ \left(\frac{dx}{dc}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{dy}{da}\right) = 0;\ \left(\frac{dy}{db}\right) = 1;\ \left(\frac{dy}{dc}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{dz}{da}\right) = 0;\ \left(\frac{dz}{db}\right) = 0;\ \left(\frac{dz}{dc}\right) = 1,$$

et la valeur de G, art. 380, devenant égale à l'unité.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			254. Trouver, dans l'hypothèse des deux problèmes précédens, les variations de la densité et de la pression.

383. Tous ces préliminaires posés, les considérations relatives à la variation de la densité, ou semblables à celles qui, art. 364, ont conduit à l'équation de *continuité* de l'art. 365, fournissent ce résultat très-simple, que la quantité Gk ne dépend nullement du temps, c'est-à-dire, qu'elle est constante pour une même molécule, et ne varie que d'une molécule à une autre; en sorte que cette nouvelle solution donne pour l'équation de *continuité*,

$$Gk = k_{(0)}.$$

384. L'équation de l'art. 364 est la différentielle de celle de l'article précédent, prise par rapport au temps t.

385. Lorsque le fluide est incompressible, $k = k_{(0)}$ et $G = 1$, équation analogue à celle exprimée par l'équation de l'art. 366, et qui, en substituant pour G sa valeur, article 380, établit entre x, y, z, a, b et c une relation au moyen de laquelle les coordonnées x, y et z d'une molécule se déduisent de ses coordonnées initiales a, b et c.

386. Maintenant, si on considère les actions que les puissances appliquées à une molécule fluide exercent sur cette molécule, parallélement aux x, aux y et aux z, en ayant égard à la pression qu'éprouve cette molécule, on parvient aux trois équations,

Équation du mouvement d'une molécule fluide, considérée parallélement aux axes des.......

$$\left\{\begin{aligned}
x \ldots\ldots \left(\frac{dp}{da}\right) &= k\left[\left(\frac{dx}{da}\right)X + \left(\frac{dy}{da}\right)Y + \left(\frac{dz}{da}\right)Z\right] \\
&\quad - \frac{k}{g}\left[\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right] \\
y \ldots\ldots \left(\frac{dp}{db}\right) &= k\left[\left(\frac{dx}{db}\right)X + \left(\frac{dy}{db}\right)Y + \left(\frac{dz}{db}\right)Z\right] \\
&\quad - \frac{k}{g}\left[\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right] \\
z \ldots\ldots \left(\frac{dp}{dc}\right) &= k\left[\left(\frac{dx}{dc}\right)X + \left(\frac{dy}{dc}\right)Y + \left(\frac{dz}{dc}\right)Z\right] \\
&\quad - \frac{k}{g}\left[\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(\frac{dz}{dc}\right)\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right].
\end{aligned}\right.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		163. Le produit de la densité d'une molécule par la quantité G, évaluée art. 380, est une quantité constante égale à la densité initiale de la molécule.	255. Trouver, pour le mouvement des fluides, l'équation de *continuité*, d'après la considération de l'état initial.
X, Y et Z ont la même signification qu'à l'art. 367.			256. Trouver, d'après la considération de l'état initial, les trois équations du mouvement des fluides dans lesquelles entrent les valeurs des puissances appliquées aux molécules.

387. Faisant la somme de ces trois équations après les avoir multipliées respectivement par δa, δb, δc, on a

$$\delta p = k(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - \frac{k}{g}\left[\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\delta z\right],$$

équation dans laquelle les différentielles δp, δx, δy, δz (les quantités p, x, y et z étant en général fonctions de a, b, c et t), ne sont prises que par rapport à a, b et c, et ne contiennent pas les termes $\left(\frac{dp}{dt}\right)dt$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)dt$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)dt$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)dt$ respectivement. Ainsi l'équation intégrale déduite de la précédente, qui donnerait la valeur de p, devrait être complétée par une fonction arbitraire du temps t.

388. Les équations différentielles du mouvement des fluides, déduites de la considération de l'état initial, sont donc

$$(A) \ldots\ldots Gk = k_{(0)}$$

$$(B) \ldots \delta p = k(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - \frac{k}{g}\left[\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\delta z\right].$$

La première équation donne, dans le cas des fluides incompressibles, $G = 1$, ce qui établit une relation entre x, y, z et a, b, c.

La deuxième équation équivaut à trois; car, en substituant pour δx, δy et δz leurs valeurs, art. 379, et observant que δa, δb et δc sont indépendantes, parce qu'elles se rapportent à la position d'une molécule par rapport à une autre infiniment voisine, mais, à cela près, située arbitrairement, on peut égaler séparément à zéro les coëfficiens de ces trois différentielles δa, δb, δc, ce qui donne les trois équations de l'art. 386.

Cette seconde équation étant supposée intégrée, si dans l'intégrale on regarde a, b, c comme constantes et t comme variable, on aura, pour un instant quelconque, les circonstances du mouvement de la molécule dont les coordonnées initiales étaient a, b et c.

Si à ces quatre équations on réunit celle qui exprime la relation entre la température, la pression et la densité, on aura cinq équations pour déterminer les cinq inconnues mentionnées art. 363, qui sont p, k, u, v et w.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			257. Réduire les équations demandées par le problème précédent, à une seule qui les représente toutes trois.
			258. Récapituler les équations du mouvement, déduites de la considération de l'état initial.

389. REVENONS aux équations de l'art. 368 qui, multipliées par δx, δy et δz et additionnées, donnent

$$g\delta\Phi - \frac{g}{k}\delta p = \begin{cases} [(\frac{du}{dx})u + (\frac{du}{dy})v + (\frac{du}{dz})w + (\frac{du}{dt})]\delta x \\ + [(\frac{dv}{dx})u + (\frac{dv}{dy})v + (\frac{dv}{dz})w + (\frac{dv}{dt})]\delta y \\ + [(\frac{dw}{dx})u + (\frac{dw}{dy})v + (\frac{dw}{dz})w + (\frac{dw}{dt})]\delta z, \end{cases}$$

et supposons que $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ soit la différentielle exacte d'une fonction Ω de x, y, z et t (bien entendu en différenciant Ω seulement par rapport à x, y et z, et en supposant t constant); on aura donc

$$\Omega = \text{fonction de } (x, y, z \text{ et } t);$$

$$\delta\Omega = u\delta x + v\delta y + w\delta z + \theta\delta t;$$

$$u = (\frac{d\Omega}{dx}); \; v = (\frac{d\Omega}{dy}); \; w = (\frac{d\Omega}{dz}); \; \theta = (\frac{d\Omega}{dt})$$

$$(\frac{du}{dy}) = (\frac{dv}{dx}); (\frac{dv}{dz}) = (\frac{dw}{dy}); (\frac{du}{dt}) = (\frac{d\theta}{dx});$$

$$(\frac{dv}{dz}) = (\frac{dw}{dy}); (\frac{dv}{dt}) = (\frac{d\theta}{dy}); (\frac{dw}{dt}) = (\frac{d\theta}{dz});$$

et en appliquant ces valeurs au second membre de l'équation ci-dessus, on trouvera aisément

$$U\delta x + V\delta y + Wdz = u\delta u + v\delta v + w\delta w + d\theta,$$

en se rappellant que U, V et W sont les valeurs respectives des trois termes du second membre.

390. AINSI, en supposant que $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ est une différentielle exacte, l'équation du mouvement des fluides devient

$$g\int\frac{\delta p}{k} = g\Phi - (\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \theta) + f(t):$$

on a ajouté une fonction arbitraire du temps $f(t)$, parce que les différentielles intégrées ne sont prises que par rapport à x, y et z, et cependant $f(t)$ pourrait être censée renfermée dans θ et ne pas s'écrire séparément sans que le résultat précédent fût moins général.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$\delta\Phi = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$. U, V et W ont la même signification qu'à l'art. 370.			259. Trouver ce que deviennent les trois équations des fluides dans lesquelles entrent les valeurs des puissances, lorsque la quantité $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ est une différentielle exacte.

391. L'ÉQUATION de l'article précédent sera toujours satisfaite, lorsque la densité k sera fonction de la pression p; et si quelque autre circonstance la rend possible, il faudra que k soit fonction de p et de $g\Phi - (\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \theta)$, autrement l'hypothèse de l'art. 389 devra être exclue.

392. ON voit encore par l'équation de l'article 390, que dans l'hypothèse de l'article 389, la pression d'une molécule fluide de densité constante diminue lorsque sa vîtesse augmente.

393. IL est important d'ajouter que la quantité $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ est, dans tous les instans, une différentielle exacte d'une fonction Ω de x, y, z et t, prise par rapport à x, y et z, si elle l'est à un seul instant. *Lagrange* est le premier qui en ait fait l'observation. *Mécan. anal.* Parmi les circonstances où ce cas a lieu, on peut distinguer celle où le mouvement part du repos.

S'il y a des vîtesses initiales, il faut qu'elles soient telles que $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ soit intégrable; ce qui arrive lorsque ces vîtesses initiales sont produites par une impulsion quelconque sur la surface d'un fluide, telle que l'action d'un piston.

394. EN conservant l'hypothèse de $u\delta x + v\delta y + w\delta z$, différentielle exacte d'une fonction Ω de x, y, z et t, l'équation de continuité de l'art. 365,

$$\left(\frac{d(ku)}{dx}\right) + \left(\frac{d(kv)}{dy}\right) + \left(\frac{d(kw)}{dz}\right) + \left(\frac{dk}{dt}\right) = 0$$

devient

$$0 = k\left[\left(\frac{d^2\Omega}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2\Omega}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2\Omega}{dz^2}\right)\right] + \left(\frac{dk}{dx}\right)\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$$
$$+ \left(\frac{dk}{dy}\right)\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + \left(\frac{dk}{dz}\right)\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) + \left(\frac{dk}{dt}\right),$$

et la fonction Ω doit être déterminée de manière à satisfaire tant à cette équation qu'à celle de l'article 390.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		164. L'équation donnée par la solution du problème 259, peut être satisfaite lorsque la densité est fonction de la pression. 165. Dans le cas du même problème, celui où $u \delta x + v \delta y + w \delta z$ est une différentielle exacte, la pression d'une molécule fluide de densité constante diminue lorsque sa vitesse augmente. 166. La quantité $u \delta x + v \delta y + w \delta z$ est une différentielle exacte dans tous les instans, si elle l'est dans un seul instant. Ce cas a lieu lorsque le mouvement part de l'état de repos, et lorsque les vîtesses initiales, dans un fluide incompressible, sont produites par une impulsion quelconque sur la surface de ce fluide, telle que l'action d'un piston.	260. Trouver ce que devient l'équation de continuité, lorsque $u \delta x + v \delta y + w \delta z$ est une différentielle exacte.

395. CETTE détermination présente les plus grandes difficultés, lorsqu'on suppose que la densité k est variable d'une manière quelconque, et même dans le cas où elle ne dépend que de la seule pression p; mais si on suppose la densité k constante, l'équation de l'article précédent se simplifie beaucoup et devient,

$$\left(\frac{d^2\,\Omega}{d\,x^2}\right) + \left(\frac{d^2\,\Omega}{d\,y^2}\right) + \left(\frac{d^2\,\Omega}{d\,z^2}\right) = 0,$$

qui, étant résolue, donne pour les trois vîtesses de la molécule, art. 389,

$$u = \left(\frac{d\,\Omega}{d\,x}\right),\ v = \left(\frac{d\,\Omega}{d\,y}\right),\ w = \left(\frac{d\,\Omega}{d\,z}.\right)$$

396. LORSQUE le fluide n'a que de très-petits mouvemens, on peut, dans l'équation de l'art. 390, négliger les carrés des vîtesses u^2, v^2 et w^2; ce qui la réduit à

$$g\Phi - g\int\frac{dp}{k} = \left(\frac{d\,\Omega}{d\,t}\right)$$

Il faut observer, art. 389, que $\theta = \left(\frac{d\Omega}{d\,t}\right)$; et, art. 390, que $f(t)$ peut être censé compris dans θ.

397. AINSI, dans le cas où $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ est une différentielle exacte d'une fonction Ω de x, y, z et t, cas qui a des applications très-étendues, les équations différentielles du mouvement d'un fluide sont,

$$(A)\ldots g\Phi - g\int\frac{\delta p}{k} = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \left(\frac{d\Omega}{d\,t}\right)$$

Voyez la remarque qui accompagne l'équation de l'article précédent.

et dans le cas d'un petit mouvement,

$$(B)\ldots g\Phi - g\int\frac{\delta\,p}{k} = \left(\frac{d\Omega}{d\,t}\right),$$

auxquelles il faut joindre l'équation de continuité,

$$(C)\ldots k\left\{\left(\frac{d^2\,\Omega}{d\,x^2}\right) + \left(\frac{d^2\,\Omega}{d\,y^2}\right) + \left(\frac{d^2\,\Omega}{d\,z^2}\right)\right\} + \left(\frac{d\,k}{d\,x}\right)\left(\frac{d\,\Omega}{d\,x}\right) + \left(\frac{d\,k}{d\,y}\right)\left(\frac{d\,\Omega}{d\,y}\right) + \left(\frac{d\,k}{d\,z}\right)\left(\frac{d\,\Omega}{d\,z}\right) + \left(\frac{d\,k}{d\,t}\right) = 0,$$

qui, lorsque le fluide est homogène, devient

$$(D)\ldots\left(\frac{d^2\,\Omega}{d\,x^2}\right) + \left(\frac{d^2\,\Omega}{d\,y^2}\right) + \left(\frac{d^2\,\Omega}{d\,z^2}\right) = 0.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			261. Trouver, pour l'hypothèse de $u\delta x + v\delta y + w\delta z$, différentielle exacte, l'équation du mouvement des fluides dans le cas où ce mouvement est très-petit.
			262. Faire la récapitulation des équations du mouvement des fluides, dans l'hypothèse de $u\delta x + v\delta y + w\delta z$, différentielle exacte.

398. L'INTÉGRATION de cette équation présente de très-grandes difficultés, qui ont été heureusement surmontées par *Marc-Antoine Parseval,* mathématicien distingué, connu de l'Institut national et des savans par des travaux et des découvertes importantes. Voici le précis de sa méthode et de ses résultats qu'il m'a permis de publier, et qui a l'avantage de faire dépendre l'intégration de l'équation dont il s'agit, de celle de l'équation de la propagation du son que je donnerai bientôt, et qui se trouvera ainsi résolue d'avance.

Si on a une suite,

$$Q = a + bx + cx^2 + fx^3 + \&c.,$$

dont on connaît la somme Q, et qu'on multiplie chacun de ses termes respectivement par ceux d'une autre suite,

$$A, B, C, F, \&c.;$$

cette dernière étant telle qu'on ait $\Delta^{(m)} A = 0$, *Euler* a trouvé que la somme de la suite

$$Aa + Bbx + Ccx^2 + Ffx^3 + \&c.,$$

était égale à

$$AQ + \frac{x\,dQ\,.\,\Delta A}{dx} + \frac{x^2\,d^2Q\,.\,\Delta^2 A}{dx^2} + \&c.\ldots + \frac{x^{m-1}\,d^{m-1}Q\,.\,\Delta^{m-1}A}{dx^{m-1}},$$

expression finie, puisque le terme qui contiendrait $\Delta^m A$ serait nul, dans laquelle $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{d^2Q}{dx}$ sont des fonctions données.

Parseval a résolu la question d'une manière beaucoup plus générale, en faisant dépendre la sommation d'une suite ainsi formée des produits, terme à terme, de deux autres suites, de l'intégration, par intégrale définie, d'une fonction finie à une seule variable.

Si on a deux suites,

$$A + B\rho + C\rho^2 + F\rho^3 + \&c. = T,$$

$$a + \frac{b}{\rho} + \frac{c}{\rho^2} + \frac{f}{\rho^3} + \&c. = T_{\prime},$$

dont on connaisse les sommes T et $T_{\prime}$, on aura la somme de la suite

$$Aa + Bb + Cc + Ff + \&c. = v,$$

par l'opération suivante :

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			263. Intégrer l'équation de *continuité*, en supposant que $u\delta x + v\delta y + w\delta z$ est une différentielle exacte, et que le fluide est homogène.

Il faudra faire le produit $TT_{,}$, et y substituer successivement, au lieu de θ, 1.° cos. $u + (-1)^{\frac{1}{2}}$ sin. u; 2.° cos. $u - (-1)^{\frac{1}{2}}$ sin. u: la première substitution changera le produit $TT_{,}$ en une fonction que j'appelle $v_{,}$, et la seconde substitution changera le même produit $TT_{,}$ en une autre fonction que j'appelle $v_{,,}$. Ces deux opérations faites, on aura, pour la somme cherchée,

$$v = \frac{1}{u}\int \frac{v_{,} + v_{,,}}{2}\,du.$$

Les imaginaires que cette méthode introduit dans les fonctions $v_{,}$ et $v_{,,}$ doivent se détruire; on peut y parvenir par des artifices particuliers de calcul dont *Parseval* s'est occupé.

Considérons maintenant l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = gh\left\{\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right\}\ldots\ldots(1),$$

qui, comme nous le verrons bientôt, est celle de la propagation du son, dans le cas de deux dimensions.

Si on fait

$$\omega = x + y\sqrt{(-1)},\ \theta = x - y\sqrt{(-1)},\ gh = a,$$

cette équation se réduit à

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 4a\frac{d^2\varphi}{d\omega\, d\theta}\ldots\ldots\ldots(2).$$

Supposons que la valeur de φ, qui satisfait à cette équation de la manière la plus générale, soit représentée par cette suite développée par rapport aux puissances de t,

$$\varphi = \varphi_{,} + \varphi_{,,}t + \varphi_{,,,}t^2 + \varphi_{IV}t^3 + \&c.,$$

$\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, &c., étant des fonctions quelconques de ω et de θ, si on substitue cette valeur de φ dans la proposée (2), et qu'on détermine convenablement les différens coèfficiens des puissances de t, on aura

$$(3)\ldots\varphi = \left\{\begin{array}{l} \varphi_{,} + \frac{4at^2}{1.2}\cdot\frac{d^2\varphi_{,}}{d\omega\, d\theta} + \frac{(4a)^2t^4}{1\ldots4}\cdot\frac{d^4\varphi_{,}}{d\omega^2 d\theta^2} + \frac{(4a)^3t^6}{1\ldots6}\cdot\frac{d^6\varphi_{,}}{d\omega^3 d\theta^3} + \&c. \\ + \varphi_{,,}t + \frac{4at^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^2\varphi_{,,}}{d\omega\, d\theta} + \frac{(4a)^2t^5}{1\ldots5}\cdot\frac{d^4\varphi_{,,}}{d\omega^2 d\theta^2} + \frac{(4a)^3t^7}{1\ldots7}\cdot\frac{d^6\varphi_{,,}}{d\omega^3 d\theta^3} + \&c., \end{array}\right.$$

$\varphi_{,}$ et $\varphi_{,,}$ étant deux fonctions arbitraires de ω et θ.

Le problème se réduit donc à sommer chacune de ces suites ; or, il est évident que si on peut parvenir à sommer la seconde, on pourra facilement sommer la première qui en est la différentielle par rapport à t.

Pour sommer la seconde suite, faisons $4a = \mu$ et $\varphi_{,,} = \int^{2m} . \psi d\omega^m d\theta^m$, ψ étant une nouvelle fonction arbitraire et m étant un nombre infini; cette suite deviendra

$$t \int^{2m} \psi d\omega^m d\theta^m + \frac{\mu t^3}{1.2.3} \int^{2m-2} \psi d\omega^{m-1} d\theta^{m-1} + \frac{\mu t^5}{1.2.3.4.5} \int^{2m-4} \psi d\omega^{m-2} d\theta^{m-2} + \&c.,$$

laquelle peut se réduire à cette forme,

$$(A) \ldots \iint \left\{ \frac{(\omega - \vartheta)^m (\theta - \sigma)^m}{1 \ldots m . 1 \ldots m} t + \frac{(\omega - \vartheta)^{m-1} (\theta - \sigma)^{m-1}}{1 \ldots (m-1) . 1 \ldots (m-1)} . \frac{t^3 \mu}{1.2.3} \ldots\ldots + (\omega - \vartheta)(\theta - \sigma) . \frac{t^{2m-1} \mu^{m-1}}{1 \ldots (2m-1)} + \frac{t^{2m+1} \mu^m}{1 \ldots (2m-1)} \right\} \psi(\vartheta, \sigma) d\theta d\sigma,$$

en faisant, après les intégrations, $\omega = \vartheta$, $\theta = \sigma$. On pourrait démontrer cette formule par la méthode que *Laplace* a employée pour réduire une formule analogue à celle-ci, dans son Mémoire cité dans le volume de l'Académie des sciences de Paris, année 1779 ; mais on s'assurera aussi de sa légitimité, par la méthode connue des intégrations par parties.

Il ne reste donc plus qu'à sommer la suite qui multiplie la fonction dans l'expression précédente. Or, pour cela, je la suppose dépouillée de ses coëfficiens t, $\frac{\mu t^3}{1.2.3}$, $\frac{\mu^2 t^5}{1 \ldots 5}$, &c., et je considère la suite,

$$(B) \ldots s \left\{ \frac{(\omega - \vartheta)^m (\theta - \sigma)^m}{1 \ldots m . 1 \ldots m} - \frac{(\omega - \vartheta)^{m-1} (\theta - \sigma)^{m-1}}{1 \ldots (m-1) . 1 \ldots (m-1)} s^2 + \ldots - (\omega - \vartheta)(\theta - \sigma) s^{2m-1} + s^{2m} \right\},$$

s étant une nouvelle variable : or, cette suite est égale à

$$s^{2m+1} \left\{ \frac{(\omega - \vartheta)^m (\theta - \sigma)^n}{1 \ldots m . 1 \ldots m . s^{2m}} - \frac{(\omega - \vartheta)^{m-1} (\theta - \sigma)^{m-1}}{1 \ldots (m-1) . 1 \ldots (m-1) . s^{2m-2}} + \ldots - \frac{(\omega - \vartheta)(\theta - \sigma)}{s^2} + 1 \right\},$$

dont la somme, évaluée par la règle ci-dessus, est

$$\frac{s^{2m+1}}{u}\int du\,.\,e^{\frac{2(-1)^{\frac{1}{2}}(\omega-\vartheta)^{\frac{1}{2}}(\theta-\sigma)^{\frac{1}{2}}\sin.u}{s}};$$

En prenant seulement la partie réelle de cette expression, et faisant, après l'intégration, $u = \pi$, cette somme sera égale à

$$\frac{s^{\omega m+1}}{u}\int du\cos.\left\{\frac{2(\omega-\vartheta)^{\frac{1}{2}}(\theta-\sigma)^{\frac{1}{2}}\sin.u}{s}\right\}.$$

Substituant donc maintenant $\cos.v+(-1)^{\frac{1}{2}}\sin.v$ à la place de s, on aura, en faisant $(\omega-\vartheta)^{\frac{1}{2}}(\theta-\sigma)^{\frac{1}{2}}=\Pi$, la valeur de l'expression précédente égale à celle-ci :

$$\frac{1}{u}\{\cos.(2m+1)v+(-1)^{\frac{1}{2}}\sin.(2m+1)v\}\int du\cos.\{2\Pi$$
$$\sin.u[\cos.v-(-1)^{\frac{1}{2}}\sin.v]\};$$

or, on a

$\cos.\{2\Pi\sin.u[\cos.v-(-1)^{\frac{1}{2}}\sin.v]\} = \cos.(2\Pi\sin.u\cos.v)\times$
$\cos.\{2\Pi\sin.u(-1)^{\frac{1}{2}}.\sin.v\}+\sin.\{2\Pi\sin.u\cos.v\}\times$
$\sin.\{2\Pi\sin.u(-1)^{\frac{1}{2}}.\sin.v\}$.

Passant des sinus et cosinus d'arcs imaginaires aux exponentiels réels, on aura

$$\int\cos.(2\Pi\sin.u)\{\cos.v-(-1)^{\frac{1}{2}}\sin.v\}du = \ldots\ldots\ldots$$
$$\int\{\cos.[2\Pi\sin.u\cos.v(\frac{e^{2\Pi\sin.u\sin.v}+e^{-2\Pi\sin.u\sin.v}}{2})]+(1-)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sin.[2\Pi\sin.u\cos.v(\frac{e^{-2\Pi\sin.u\sin.v}-e^{+2\Pi\sin.u\sin.v}}{2})]\}du.$$

Multipliant donc cette expression par

$$\frac{1}{u}\{\cos.(2m+1)v-(-1)^{\frac{1}{2}}\sin.(2m+1)v\},$$

on aura

$$\frac{1}{u}\left\{\cos.(2m+1)v\int\cos.\left[2\Pi\sin.u\cos.v\left(\frac{e^{2\Pi\sin.u\sin.v}+e^{-2\sin.u\sin.v}}{2}\right)\right]du\right.$$

$$-\sin.(2m+1)v\int\sin.\left[2\Pi\sin.u\cos.v\left(\frac{e^{-2\Pi\sin.u\sin.v}-e^{+2\Pi\sin.u\sin.v}}{2}\right)du\right]\Big\}$$

$$+\frac{1}{n}(-1)^{\frac{1}{2}}\left\{\sin.(2m+1)v\int\cos.\left[2\Pi\sin.u\cos.v\left(\frac{e^{2\Pi\sin.u\sin.v}+e^{-2\Pi\sin.u\sin.v}}{2}\right)\right]du\right.$$

$$-\cos.(2m+1)v\int\sin.\left[2\Pi\sin.u\cos.v\left(\frac{e^{-2\Pi\sin.u\sin.v}-e^{+2\Pi\sin.u\sin.v}}{2}\right)\right]du\Big\}$$

$$= R + S\sqrt{(-1)}.$$

Il faut maintenant combiner ce résultat avec la suite

$$\frac{t}{s}-\frac{\mu t^3}{1.2.3.s^3}+\frac{\mu^2 t^5}{1\ldots5.s^5}-\&c.:$$

pour cela, je fais $\mu = \nu^2$; cette suite deviendra

$$\frac{t}{s}-\frac{\nu^2 t^3}{1.2.3.s^3}+\frac{\nu^4 t^6}{1\ldots5.s^5}-\frac{\nu^6 t^7}{1\ldots6.s^7}+\&c.,$$

qui est égale à $\frac{1}{\nu}\sin.\frac{\nu t}{s}$, je substitue, dans cette expression, à la place de s, sa valeur $\cos.v+(-1)^{\frac{1}{2}}\sin.v$, et j'ai

$$\frac{1}{\nu}\sin.\left\{\nu t\left[\cos.v-(-1)^{\frac{1}{2}}\sin.v\right]\right\}.$$

Je développe cette expression, et j'ai

$$\frac{1}{\nu}\sin.\frac{\nu t}{s}=\frac{1}{\nu}\left\{\sin.\nu t\cos.\left[v\left(\frac{e^{\nu t\sin.v}+e^{-\nu t\sin.v}}{2}\right)\right]-\right.$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}}\cos.\nu t\cos.v\left(\frac{e^{-\nu t\sin.v}-e^{\nu t\sin.v}}{2}\right)\Big\}=R'+S'\sqrt{(-1)}.$$

Multipliant cette expression par la précédente, et prenant seulement la partie réelle qui en résulte, on aura une fonction en v, qui, intégrée par rapport à v, et faisant $v=\pi$ après l'intégration, nous donnera la suite que nous cherchons.

On aura donc cette suite égale à

$$\int\int \frac{1}{v} \int \{RR' - SS'\} dv . \psi(\vartheta, \sigma) d\vartheta d\sigma :$$

mettant dans cette expression, au lieu de ψ, une autre fonction F, la différenciant par rapport à t, on aura la somme de la première suite.

On aura donc enfin pour expression de l'intégrale complète de l'équation (1),

$$\varphi = \int\int \frac{1}{v} \int \{RR' - SS'\} dv . \psi(\vartheta, \sigma) d\vartheta d\sigma + \frac{d\{\int\int \frac{1}{v} \int [RR' - SS'] dv . F(\vartheta, \sigma) d\vartheta d\sigma\}}{dt}.$$

Les intégrales par rapport à ϑ et σ doivent être prises jusqu'à $\vartheta = \omega$, $\sigma = \theta$, et celles par rapport à u et v, jusqu'à $u = \pi$ et $v = \pi$.

Il ne sera pas inutile d'appliquer cette méthode à un exemple. Je suppose donc que l'on ait

$$\psi(\vartheta, \sigma) = e^{\vartheta + \sigma};$$

il est évident que la suite

$$\int\int s \left\{ \frac{(\omega - \vartheta)^m (\theta - \sigma)^m}{1 \ldots m . 1 \ldots m} - \frac{(\omega - \vartheta)^{m-1} (\theta - \sigma)^{m-1} . s^2}{1 \ldots (m-1) . 1 \ldots (m-1)} + \ldots - (\omega - \vartheta)(\theta - \vartheta) s^{2m-2} + s^{2m} \right\} \psi(\vartheta, \sigma) d\vartheta d\sigma$$

deviendra

$\{s - s^3 + s^6 - s^7 + \&c.\} e^{\omega + \theta}$: les intégrales étant prises jusqu'à $\omega = \vartheta$, $\theta = \sigma$, cette suite deviendra $\frac{s}{1 + s^2} e^{\omega + \theta}$.

Substituant $\cos. v (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. v$ à la place de s, elle deviendra $\frac{\cos. v + (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. v}{1 + \cos. 2v + (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. 2v} e^{\omega + \theta}$. Multipliant haut et bas par $1 + \cos. 2v - (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. 2v$, elle deviendra, après les réductions, $\frac{\cos. v + (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. v}{1 + \cos. 2v} e^{\omega + \theta}$; on aura donc

$$R = \frac{\cos. v}{1 + \cos. 2v} e^{\omega + \theta}, \quad S = \frac{\sin. v}{1 + \cos. 2v} e^{\omega + \theta};$$

d'une autre part, on aura,

$$\frac{1}{v}\sin.\frac{vt}{s} = \frac{1}{v}\left\{\sin. tv \cos. v\left(\frac{e^{vt\sin. v} + e^{-vt\sin. v}}{2}\right) - (-1)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.\cos. vt \cos. v\left(\frac{e^{-vt\sin. v} - e^{+vt\sin. v}}{2}\right)\right\};$$

d'où il résulte que

$$R' = \frac{1}{v}\sin. vt \cos. v\left(\frac{e^{vt\sin. v} + e^{-vt\sin. v}}{2}\right),$$
$$S' = -\frac{1}{v}\cos. vt \cos. v\left(\frac{e^{-vt\sin. v} - e^{+vt\sin. v}}{2}\right),$$

On aura donc

$$\iint \frac{1}{v}\int (RR' - SS'dv\psi(\vartheta, \sigma)d\vartheta d\sigma = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{vv}\int\left\{\frac{\cos. v}{1+\cos. 2v}\sin. vt \cos. v\left(\frac{e^{vt\sin. v} + e^{-vt\sin. v}}{2}\right) + \frac{\sin. v}{1+\cos. 2v}\right.$$
$$\left.\cos. vt \cos. v\left(\frac{e^{-vt\sin. v} - e^{vt\sin. v}}{2}\right)\right\} e^{\omega+\theta}.dv.$$

Or, le second membre de cette équation, l'intégrale, étant prise jusqu'à $v = \pi$, équivaut à $\frac{e^{vt} - e^{-vt}}{2v}$.

Car, d'une part, on a $\frac{s}{1+s^2}$ pour la somme de la suite $s - s^3 + s^5 - s^7 +$ &c.; d'une autre part, on a $\frac{1}{v}\sin.\frac{vt}{s}$ pour la somme de la suite $\frac{t}{s} - \frac{v^2t^3}{1.2.3.s^3} + \frac{v^4t^5}{1\ldots5.s^5} -$ &c.

Si l'on multiplie ces deux suites l'une par l'autre, on aura

$$\frac{s}{1+s^2}.\frac{1}{v}\sin.\frac{vt}{s} = t - ts^2 + ts^4 - ts^6 + \&c.$$
$$- \frac{v^2t^3}{1.2.3.s^2} + \frac{v^2t^3}{1.2.3} - \frac{v^2t^3s^2}{1.2.3} + \&c.$$
$$+ \frac{v^4t^5}{1\ldots5.s^4} - \frac{v^4t^5}{1\ldots5.s^2} + \frac{v^4t^5}{1\ldots5} - \&c.$$

Si donc on fait dans cette expression . . . $s = \cos. v + (-1)^{\frac{1}{2}}\sin. v$,

et $t + \frac{v^2t^3}{1.2.3} + \frac{v^4t^5}{1\ldots5} + \&c. = A$,

$-A$ sera le coëfficient de s^2. On prouvera de même que le coëfficient de s^4 sera encore $-A$, et ainsi de suite.

Si donc on fait B le coëfficient de $\frac{1}{s^2}$, C celui de $\frac{1}{s^4}$, &c.; on aura

$$\frac{s}{1+s^2}\cdot\frac{1}{\nu}\sin.\frac{\nu t}{s} = A\{1 - s^2 + s^4 - s^6 + \&c.\} + \frac{1}{s^2}B + \frac{1}{s^4}C + \frac{1}{s^6}F + \&c.$$

On aura donc

$$\frac{s}{1+s^2}\cdot\frac{1}{\nu}\sin.\frac{\nu t}{s} = \left\{\begin{array}{l} A\{1 - [\cos. 2v + (-1)^{\frac{1}{2}}\sin. 2v] \\ \quad + [\cos. 4v - (-1)^{\frac{1}{2}}\sin. 4v] - \&c.\} \\ \quad + B[\cos. 2v - (-1)^{\frac{1}{2}}\sin. 2v] \\ \quad + C[\cos. 4v - (-1)^{\frac{1}{2}}\sin. 4v] + \&c. \end{array}\right.$$

$$= A + (B-A)\cos. 2v + (C+A)\cos. 4v + \&c.$$
$$-(-1)^{\frac{1}{2}}\{(B+A)\sin. 2v - (A+C)\sin. 4v + \&c.\}.$$

Il est donc clair que la partie réelle de cette formule, qui se trouve égale à

$$\frac{1}{\nu v}\int\left\{\frac{\cos. v}{1+\cos. 2v}\sin. \nu t\left(\frac{e^{\nu t \sin. v} + e^{-\nu t \sin. v}}{2}\right) + \frac{\sin. v}{1+\cos. 2v}\cos. \nu t \cos. v\left(\frac{e^{-\nu t \sin. v} - e^{\nu t \sin. v}}{2}\right)\right\} dv,$$

l'intégrale étant prise jusqu'à $v = \pi$, deviendra

$$A = t + \frac{\nu^2 t^3}{1.2.3} + \frac{\nu^4 t^5}{1\ldots 5} + \frac{\nu^6 t^7}{1\ldots 7},$$

égale enfin à $\frac{e^{\nu t} - e^{-\nu t}}{2\nu}$; on aura donc la somme de la suite cherchée, égale à $-\frac{e^{\nu t} - e^{-\nu t}}{2}\cdot e^{\omega+\theta}$. En effet, nommons-la T, on aura

$$\frac{DT}{dt} = \frac{e^{\nu t} + e^{-\nu t}}{2}e^{\omega+\theta},\quad \frac{d^2T}{dt^2} = \nu\left\{\frac{e^{\nu t} - e^{-\nu t}}{2}\right\}e^{\omega+\theta};$$

d'une autre part, on a $\frac{d^2T}{d\omega\, d\theta} = \frac{e^{\nu t} - e^{-\nu t}}{2\nu}\cdot e^{\omega+\theta}$.

On aura donc $\frac{ddT}{dt^2} = \nu^2 \cdot \frac{d^2T}{d\omega\, d\theta}$, qui est la même équation que la proposée.

L'intégration de l'équation des fluides se déduit aisément de l'intégration de l'équation (1). Pour cela, il suffit de faire dans cette équation, gh ou $\mu = -1$. A cet effet, je reprends la première suite (A), qui devient

$$\iint \Big\{ \frac{(\omega - \vartheta)^m (\theta - \sigma)^m}{1 \ldots m . 1 \ldots m}\, t - \frac{(\omega - \vartheta)^{m-1} (\theta - \sigma)^{m-1} t^3}{1 \ldots (m-1) 1 \ldots (m-1)}\, \frac{t^3}{1.2.3}$$
$$- (\omega - \vartheta)(\theta - \sigma) \frac{t^{m-1}}{1 \ldots (m-1)} + \frac{t^{2m+1}}{1 \ldots (2m+1)} \Big\} \downarrow d\vartheta d\sigma.$$

Je considère la suite qui multiplie la fonction, dépouillée de ses coëfficiens, t, $- \frac{t^3}{1.2.3}$, $+ \frac{t^5}{1 \ldots 5}$, — &c.; et la suite (B) devient celle-ci :

$$s \Big\{ \frac{(\omega - \vartheta)^m (\theta - \sigma)^m}{1 \ldots m . 1 \ldots m} + \frac{(\omega - \vartheta)^{m-1} (\theta - \sigma)^{m-1}}{1 \ldots (m-1) . 1 \ldots (m-1)} s^2.$$
$$+ (\omega - \vartheta)(\theta - \sigma) s^{2m-2} + s^{2m} \Big\}.$$

Cette suite se trouve égale à

$$s^{2m+1} \Big\{ \frac{(\omega - \vartheta)^m (\theta - \sigma)^m}{1 \ldots m . 1 \ldots m . s^{2m}} + \frac{(\omega - \vartheta)^{m-1} (\theta - \sigma)^{m-1}}{1 \ldots (m-1) . 1 \ldots (m-1) s^{2m-2}}$$
$$+ \frac{(\omega - \vartheta)(\theta - \sigma)}{s^2} + 1 \Big\},$$

et elle a pour somme

$$\frac{s^{2m+1}}{u} \int du . e^{\frac{2 (\omega - \vartheta)^{\frac{1}{2}} (\theta - \sigma)^{\frac{1}{2}} \cos . u}{s}},$$

en faisant $u = \pi$ après l'intégration. Il ne s'agit donc plus que de substituer à la place de s, sa valeur $\cos. v + (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. v$, et combiner l'expression résultante avec celle qui provient de $\frac{1}{v} \sin. \frac{vt}{s}$: pour cela, je fais toujours $(\omega - \vartheta)^{\frac{1}{2}} (\theta - \sigma)^{\frac{1}{2}} = \Pi$; et j'ai

$$\int du . e^{2 \Pi \cos. u [\cos. v + (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. v]} = \int e^{2 \Pi \cos. u \cos. v} \times \{ \cos. 2 \Pi \cos. u \sin. v.$$
$$- (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. 2 \Pi \cos. u \sin. v \}$$

On aura donc

$$\frac{s^{2m-1}}{u} \int d u\, e^{\frac{2 \Pi \cos. u}{s}} = \tfrac{1}{\pi} \{ \cos. (2m + 1) v +$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}} \sin. (2m + 1) v \} \int [du \{ \cos. 2 \Pi \cos. u \sin. v -$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}} \sin. 2 \Pi \cos. u \sin. v \} e^{2 \Pi \cos. u \cos. v}],$$

égale enfin, en exécutant la multiplication, à

$$\frac{1}{u}\{\cos.(2m+1)v\int du \cos. 2\Pi \cos. u \sin. v . e^{2\Pi \cos. u \cos. v}$$
$$+ \sin.(2m+1)v\int du \sin. 2\Pi \cos u \sin. v . e^{2\Pi \cos. u \cos. v}\}$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{1}{2}}}{u}\{\sin.(2m+1)v\int du \cos. 2\Pi \cos. u \sin. v . e^{2\Pi \cos. u \cos. v}$$
$$-\cos.(2m+1)v\int du \sin. 2\Pi \cos. u \sin. v . e^{2\Pi \cos. u \cos. v}\}$$
$$= R + S\sqrt{(-1)}.$$

Or, nous avons, d'une autre part, $\frac{1}{v}\sin.\frac{vt}{s} = \frac{1}{\sqrt{(-1)}}$ $\sin.\frac{t\sqrt{(-1)}}{s}$, et $\sin.\frac{t}{s}\sqrt{(-1)} = \frac{e^{\frac{t}{s}} - e^{-\frac{t}{s}}}{2\sqrt{(-1)}}$: la valeur précédente deviendra donc $-\frac{1}{2}\{e^{\frac{t}{s}} - e^{-\frac{t}{s}}\}$.

Faisant, dans cette expression, $s = \cos. v + (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. v$, on aura

$$-\frac{1}{2}(e^{\frac{t}{s}} - e^{-\frac{t}{s}}) = -\frac{1}{2}\{e^{t[\cos. v - (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. v]} - e^{-t[\cos. v - (-1)^{\frac{1}{2}} \sin. v]}$$
$$= \{\frac{e^{t\cos. v} - e^{-t\cos. v}}{2}.\cos. t \sin. v - (-1)^{\frac{1}{2}}.\frac{e^{t\cos. v} - e^{-t\cos. v}}{2}$$
$$\sin. t \sin. v = R' + S'\sqrt{(-1)}\},$$

et finalement pour la valeur de φ,

$$\varphi = \iint \frac{1}{v}\int(RR' - SS')\,dv.\psi(\vartheta,\sigma)\,d\vartheta d\sigma + \frac{d\{\iint\frac{1}{v}\int(RR' + SS')\,dv.F(\vartheta,\sigma)\,d\vartheta d\sigma\}}{dt}.$$

399. SUPPOSONS d'abord que le mouvement d'un fluide ait lieu dans un tube rectiligne infiniment étroit, dont la section transversale soit cependant de grandeur variable, et telle que deux sections faites à une distance finie l'une de l'autre, puissent avoir entre elles un rapport différent de l'unité. Pour plus de commodité, imaginons que la section ω soit un trapèze dont les deux côtés parallèles, variables de longueur, soient à angles droits, sur un des deux autres côtés constant de longueur, ce dernier étant toujours sur l'axe ou directrice; cette hypothèse ne diminue en rien la généralité des formules ci-après.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
ω = une section quelconque perpendiculaire à l'axe ou directrice du tuyau rectiligne. x = la distance de la section ω à un point fixe pris sur la directrice. p et k sont respectivement la pression et la densité de la tranche fluide qui a ω pour base. g = la force accélératrice de la pesanteur à la surface de la terre;			264. Trouver les équations du mouvement d'un fluide dans un tube infiniment étroit, rectiligne, et dont les sections, perpendiculaires à l'axe longitudinal, sont de grandeur variable, 1.° En les déduisant des équations générales données art. 372;

On aura dans ce cas, article 372, en observant que la grandeur infiniment petite d'une section transversale permet de considérer toutes les molécules de cette section comme ayant la même vîtesse dans le sens de l'axe longitudinal : $U = (\frac{du}{dx})u + (\frac{du}{dt})$, $V = 0$, $W = 0$; d'où $U\delta x = u(\frac{du}{dx})\delta x + (\frac{du}{dt})\delta x = u\delta u + (\frac{du}{dt})\delta x$, en observant que δu ne désigne pas l'accroissement de vîtesse d'un même trapèze élémentaire pendant l'instant dt, mais la différence contemporaine de vîtesse des deux tranches élémentaires infiniment voisines ; ce qui èst indiqué par le δ substitué au d, ainsi que je l'ai dit précédemment.

On aura de plus $(\frac{d(kw)}{dz}) = 0$, et, à cause de la variabilité de la section ω, $(\frac{d(kv)}{dy}) = ku.\frac{d\omega}{\omega dx}$, en supposant que le petit côté variable de la section ω représente la coordonnée y, et que le côté constant représente z.

Les formules (A) et (B) de l'art. 372, deviendront respectivement,

(1)...

$$ku\frac{d\omega}{\omega dx} + (\frac{d(ku)}{dx}) + (\frac{dk}{dt}) = 0$$ Équation de continuité,

qui, multipliée par ω, devient

$$(\frac{d(ku\omega)}{dx}) + \omega(\frac{dk}{dt}) = 0,$$

$$\frac{g\delta p}{k} = gX\delta x - u\delta u - (\frac{du}{dt})\delta x$$ Le temps t est supposé constant, c'est-à-dire que δp, δx et δu se rapportent aux états contemporains de deux molécules infiniment voisines.

Rapportant la solution du problème aux formules de l'art. 388, et observant qu'eu égard à la variabilité de la section ω, on a $G = \frac{\omega}{O}(\frac{dx}{da})$, les équations (A) et (B) de l'article cité deviennent respectivement,

(2)...

$$k\omega(\frac{dx}{da}) = Ok_{(0)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ Équation de continuité.

$$\frac{g\delta p}{k} = gX\delta x - (\frac{d^2x}{dt^2})\delta x \ldots\ldots$$ Le temps t est supposé constant.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
u = la vîtesse parallèle à l'axe ou directrice du tube.			
X a la même signification qu'à l'article 367.			
O et $k_{(o)}$ sont respectivement la section transversale et la densité au point qui est à une distance a de l'origine de x.			2.° En les déduisant des équations générales données, art. 388, qu'on a obtenues en faisant entrer en considération l'état initial du fluide.

x, k, p et u doivent être de telles fonctions de a et t, qu'en faisant $t = 0$, on trouve $x = a$, $k = k_0$, $u = U$.

La section ω est fonction de x; mais comme $x - a$ est le chemin parcouru pendant le temps t, il existe, sous ce point de vue, des relations entre ω, a et t.

400. CONSIDÉRONS maintenant le mouvement d'un fluide dans un tuyau infiniment étroit, dont la directrice ou l'axe est une courbe plane quelconque, les sections perpendiculaires à cette directrice étant d'ailleurs d'étendue variable, c'est-à-dire qu'à la courbure près de la directrice on conserve les hypothèses de l'article précédent. Pour se former une idée nette de ce qu'on doit entendre par ce mot *directrice*, il n'y a qu'à imaginer une courbe renfermée dans l'intérieur du tube, telle que si on fait une section quelconque perpendiculaire à cette courbe, toutes les molécules comprises dans cette section aient une vîtesse commune dans le sens de la tangente à la courbe; le diamètre infiniment petit du tube permettant cette hypothèse, ainsi qu'on l'a déjà observé.

Les formules (A) et (B) de l'article 372 deviennent, dans ce cas, respectivement

$$q\vartheta \cdot \frac{d\omega}{\omega\, ds} + \left(\frac{d(k\vartheta)}{ds}\right) + \left(\frac{dk}{dt}\right) = 0,$$

ou, en multipliant par ω,

$$(1) \ldots \left(\frac{d(q\vartheta)}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dk}{dt}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots \quad \text{Équation de continuité.}$$

$$\frac{g\delta p}{k} = g(X\delta x + Y\delta y) - \vartheta d\vartheta - \delta s\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) \ldots\ldots$$

Le temps est supposé constant. *Voy.* la remarque aux équations (1) de l'article précédent.

La puissance T qui agit dans le sens de la courbe, a pour valeur

$$T = \frac{X\delta x + Y\delta y}{ds}; \text{ d'où } Tds = Xdx + Ydy;$$

au moyen de quoi les deux équations du mouvement sont

$$\left(\frac{d(q\vartheta\omega)}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dk}{dt}\right) = 0, \quad \frac{g\delta p}{k} = gT\delta s - \vartheta d\vartheta - \delta s\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right);$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
U = la vîtesse de la tranche O, dans le sens de l'axe ou directrice du tube.			
			265. Trouver les équations du mouvement d'un fluide dans un tube infiniment étroit, dont l'axe ou directrice est une courbe plane, et dont les sections perpendiculaires à cet axe sont de grandeur variable, 1.° En les déduisant des équations générales données art. 372;
v = la vîtesse dans le sens de la courbe de la tranche fluide infiniment mince qui a x et y pour coordonnees.			
s = la longueur du tube depuis le point qui correspond à l'origine, jusqu'à celui qui correspond à l'extrémité de x et y.			
g = la force accélératrice de la pesanteur à la surface de la terre.			
Tg est la force accélératrice qui, si la molécule était libre, lui serait imprimée en vertu de l'action des puissances qui la sollicitent dans le sens de la direction du tube.			
X et Y ont la même signification qu'à l'art. 367.			

ce qui donne absolument les mêmes résultats que dans l'article précédent, en substituant s, ϑ et T à x, u et X, c'est-à-dire, en prenant dans chaque cas, pour abscisse, la longueur du tube, depuis un point fixe de ce tube jusqu'à la molécule dont on considère le mouvement, et en n'ayant égard qu'à la vîtesse et à l'action des puissances qui ont lieu dans le sens de la direction du tube; et, sous ce point de vue, la courbure du tube ne change rien aux circonstances du mouvement.

Les équations de l'article 388, appliquées à la même question, deviennent

$$(2)\ldots\begin{cases} k\omega\left(\frac{ds}{dA}\right) = Ok_{(o)} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{Équation de continuité.} \\ \frac{g\,dp}{k} = g(X\delta x + Y\delta y) - \delta s\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) & \text{Le temps est supposé constant.} \end{cases}$$

Ces deux équations, comparées aux équations (2) de l'article précédent, donnent lieu aux mêmes observations que les équations (1).

401. Enfin, si on suppose que le tube infiniment étroit a pour directrice une courbe à double courbure, les équations de l'art. 372 deviendront

$$(1)\ldots\begin{cases} \left(\frac{d(k\vartheta\omega)}{ds}\right) + \omega\left(\frac{dk}{dt}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{Équation de continuité.} \\ \frac{g\delta p}{k} = g(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - \vartheta\delta\vartheta - \delta s\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)\ldots & \text{Le temps est supposé constant.} \end{cases}$$

et celles de l'article 388,

$$(2)\ldots\begin{cases} k\omega\left(\frac{ds}{dA}\right) = Ok_{(o)} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{Équation de continuité.} \\ \frac{g\delta p}{k} = g(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - \delta s\left(\frac{dds}{dt^2}\right)\ldots & \text{Le temps est supposé constant.} \end{cases}$$

Observez que $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = T\delta s$; et qu'ainsi, en considérant l'action des puissances et la vîtesse dans le sens de la direction du tube, on a encore ici des résultats semblables à ceux obtenus pour un tube rectiligne.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
A = la longueur du tube, depuis le point qui correspond à l'origine de x et y, jusqu'à la section qui a O pour valeur, et où la densité $= k_{(o)}$.		167. Les recherches sur le mouvement d'un fluide dans des tubes infiniment étroits, conduisent aux mêmes résultats, dans le cas où les directrices de ces tubes sont des lignes droites, et dans celui où ces directrices sont des courbes planes, en n'ayant égard qu'à l'action des puissances et à la vîtesse, qui ont lieu dans le sens de la direction du tube.	2.° En les déduisant des équations générales, données art. 388.
Toutes les lettres des équations ci à côté, ont les mêmes significations qu'aux articles précédens, et Z conserve celle de l'art. 367.		168. Le mouvement d'un fluide dans un tube infiniment étroit, dont la directrice est une courbe à double courbure, jouit de la propriété énoncée dans le théorème précédent, et qui se rapporte au cas où la directrice est une courbe plane.	266. Trouver les équations du mouvement d'un fluide dans un tube infiniment étroit, dont la directrice est une courbe quelconque, à simple ou double courbure, et dont les sections perpendiculaires à cette directrice sont de grandeur variable.

402. Les équations des art. 399 et 400 ne sont que des cas particuliers de celles de l'article précédent ; mais il était bon de les traiter séparément, afin de s'assurer démonstrativement que la courbure du tuyau ne change rien à la vîtesse acquise dans le sens de sa longueur.

De plus, X, Y et Z étant supposées fonctions de x, y et z, comme, d'après la forme linéaire du tuyau, x, y et z dépendent l'une de l'autre, l'expression $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ pourra toujours se ramener à être fonction d'une seule variable.

403. Appliquons la théorie précédente au mouvement de l'eau dans des tuyaux et dans des vases, et supposons d'abord que ce fluide se meut dans un tuyau étroit, de courbure quelconque, dont l'amplitude ou section transversale est constante ; les équations (1) de l'article 400 deviennent, dans ce cas, en observant que $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -1$ et $k =$ constante,

$$\left(\frac{du}{ds}\right) = 0$$

D'où $\delta u = 0$, vu que δu exprime la différence entre les vîtesses simultanées qui ont lieu aux extrémités de s et de $s + \delta s$; d'où encore $u = f(t)$, et par conséquent $\left(\frac{du}{dt}\right) = f'(t)$

$$g\delta p = -g\delta z - \delta s f'(t);$$

d'où on conclut, en intégrant,

$$(1) \ldots u = f(t)$$

$$(2) \ldots gp = g(h - z) - sf'(t) + F(t).$$

404. En conservant l'hypothèse de l'article précédent, les équations (2) de l'art. 400 donnent, en observant que $O = \omega$, et que $k = k_{(0)} = 1$,

$$\left(\frac{ds}{dA}\right) = 1$$

D'où $s = f(t) + A$; ce qui donne, pour la vîtesse, $u = \frac{ds}{dt} = f'(t)$, et, pour la force accélératrice, $\frac{d^2 s}{dt^2} = f''(t)$

$$g\delta p = -g\delta z - \delta s f''(t);$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
La densité k de l'eau est prise pour unité. Les z sont comptés verticalement de bas en haut, à partir d'un plan horizontal au-dessus duquel le tuyau a une position fixe. v = la vîtesse dans le sens de la direction du tuyau. h est une constante arbitraire introduite par l'intégration. f et F sont des signes de fonction. f' est le signe de la fonction dérivée de f, suivant la notation de *Lagrange*. s = la longueur du tuyau, depuis un point fixe jusqu'à celui qui a z pour ordonnée. p = la pression de la molécule qui a z pour ordonnée.		169. Le fluide étant incompressible et pesant, et le tuyau où il se meut étant infiniment étroit et d'amplitude constante, la fonction du temps qui multiplie la longueur s du tuyau dans la valeur de la pression de la tranche qui est à l'extrémité de s, est la fonction prime de celle qui donne la valeur de la vîtesse dans le sens de la longueur du tuyau.	267. Trouver les équations du mouvement de l'eau ou d'un fluide quelconque, incompressible et pesant, dans un tuyau infiniment étroit, et de courbure quelconque, dont l'amplitude ou section perpendiculaire à la directrice est constante, 1.° En les déduisant des équations (1) de l'article 400; 2.° En les déduisant des équations (2) de l'article 400, qui se rapportent au cas où on fait entrer en considération l'état initial du fluide.

d'où on conclut,

$$s = f(t) + A$$
$$\texttt{v} = f'(t)$$
$$gp = g(h - z) = sf''(t) + F(t).$$

On voit que dans ces équations, $f'(t)$ et $f''(t)$ tiennent respectivement la place de $f(t)$ et $f'(t)$ dans les équations de l'article précédent : mais les résultats ne sont pas différens pour cela ; car, vu la généralité de $f(t)$, il suffit, pour l'identité de ces résultats, que la fonction du temps qui multiplie s dans la valeur de gp, soit la *dérivée* de la fonction du temps qui donne la valeur de la vîtesse $\texttt{v}$. Il suffira donc, dans les applications suivantes, d'employer les équations de l'article 403.

405. Une autre conséquence à tirer des équations précédentes, ou en particulier de celle $\texttt{v} = f(t)$, est qu'à un instant déterminé toutes les molécules se meuvent avec la même vîtesse, et que cette vîtesse varie seulement d'un instant à l'autre et de la même quantité pour toutes les molécules. S'il en était autrement, il y aurait solution de continuité dans le fluide.

406. Appliquons les équations de l'art. 403 au cas où une masse déterminée ou constante d'eau se meut dans un tuyau étroit, d'amplitude constante et de courbure quelconque.

L'équation (2) de l'article cité, appliquée aux points extrêmes de la masse d'eau, donne

$$g\Pi' = g(h - \mu) - mf'(t) + Ft$$
$$g\Pi'' = g(h - \nu) - nf'(t) + Ft;$$

d'où on tire

$$f'(t) = \frac{g(\Pi' - \Pi'') - g(\nu - \mu)}{n - m} = \frac{g[\Pi' - \Pi'' - (\nu - \mu)]}{l}$$

$$F(t) = \frac{g(\Pi' n - \Pi'' m + n\mu - m\nu)}{l} - gh.$$

L'équation (1) donne $f(t) = \texttt{v} = \frac{dm}{dt} = \frac{dn}{dt}$; d'où $f'(t) = \frac{d^2m}{dt^2}$,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		170. Dans le cas du théorème précédent et du problème 267, toutes les tranches fluides se meuvent avec la même vîtesse.	
$l =$ la longueur du tuyau occupée par l'eau, et qui est toujours la même quoique l'eau change de place, vu que l'amplitude du tuyau est constante et la quantité du fluide invariable. m, s et n sont respectivement les longueurs du tuyau, mesurées depuis un point fixe de ce tuyau, 1.° jusqu'à l'origine de l, 2.° jusqu'à un point quelconque de l; 3.° jusqu'à l'extrémité de l; ce qui donne $l = n - m$.			268. Trouver les équations du mouvement, dans le cas où une masse donnée d'eau se meut dans un tuyau étroit, d'amplitude constante et de courbure quelconque, et déterminer, 1.° La vîtesse commune à toutes les molécules de cette masse fluide;

et égalant les deux valeurs de $f'(t)$ qu'on vient de trouver,

$$(a) \ldots \frac{d^2 m}{dt^2} = \frac{g}{l} \{ \Pi' - \Pi'' - (\nu - \mu) \}$$

Les pressions Π' et Π'' dépendent du temps t, et les coordonnées μ et ν dépendent des longueurs m et n.

Cette équation donnera la vîtesse $\frac{dm}{dt}$, commune à tous les points de la masse ; et pour avoir la pression à un point quelconque de la longueur de l, dont la position est déterminée par la longueur s ou par l'ordonnée z, on substituera dans l'équation (2) de l'article 403, les valeurs ci-dessus de $f'(t)$ et $F(t)$; ce qui donnera

$$(b) \ldots p = \frac{(\Pi' + \mu)(n - s) + (\Pi'' + \nu)(s - m)}{l} - z.$$

Les quantités μ, z et ν, dans ces équations (a) et (b), sont censées multipliées par la densité $k = 1$.

407. Si les deux pressions extrêmes Π' et Π'' sont égales, les équations (a) et (b) de l'article précédent deviennent,

$$\frac{d^2 m}{dt^2} = \frac{-g}{l}(\nu - \mu), \quad h = \Pi' + \frac{\mu(n - s) + \nu(s - m)}{l} - z;$$

et si l'une et l'autre pression sont nulles, la pression devient

$$p = \frac{\mu(x - s) + \nu(s - m)}{l} - z,$$

l'équation différentio-différentielle demeurant la même.

408. On trouve aisément, au moyen de ces équations, que l'eau, abandonnée dans un tuyau rectiligne et incliné à l'horizon, y descend de la même manière qu'un corps solide qui glisserait sur un plan incliné.

409. Si on les applique ensuite aux oscillations de l'eau dans un tuyau ou syphon d'amplitude constante, formé de deux branches verticales réunies à leur point le plus bas par une branche horizontale, avec la condition que les points extrêmes de la masse soient toujours dans les branches verticales; l'équation

$\frac{d^2 m}{dt^2} = \frac{-g}{l}(\nu - \mu)$ deviendra, dans ce cas,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{2g}{l} r = 0.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
μ, ζ et ν sont respectivement les distances, à un plan horizontal de position fixe, des extrémités de m, s et n. Π' et Π'' sont respectivement les pressions constantes ou variables qui ont lieu à l'origine et à l'extrémité de l.			2.° La pression à un point quelconque. 269. Appliquer la solution du problème précédent, au cas où les pressions extrêmes sont ou égales ou nulles.
La notation de l'art. 406 est conservée, et de plus. e = ce que devient m, lorsque les deux extrémités de l sont de niveau ou lorsque $\mu = \nu$. r = la partie de la longueur du tuyau comprise entre les extrémités de m et de e, en sorte qu'on a $r =$		171. Une masse déterminée et continue d'eau, abandonnée dans un tuyau étroit, rectiligne, et incliné à l'horizon, offre des phénomènes de mouvement identiques avec ceux du mouvement d'un corps solide qui glisserait sur un plan incliné.	270. Trouver les circonstances du mouvement d'une masse donnée d'un fluide pesant et incompressible, qui oscille dans un tuyau recourbé, et déterminer, 1.° La vitesse, 2.° La pression.

Intégrant, et substituant pour r, sa valeur $e - m$, on a

$$(c)\ldots m = e - a \sin.\left\{(t+b)\sqrt{\frac{2g}{l}}\right\}$$ a et b sont les deux constantes arbitraires qui complètent l'intégrale.

$$\text{d'où}\ldots u = \frac{dm}{dt} = \frac{-a\sqrt{2g}}{\sqrt{l}} \cos.\left\{(t+b)\sqrt{\frac{2g}{l}}\right\};$$

et comme les deux extrémités de la masse fluide sont pressées chacune par le poids de l'atmosphère, on a, art. 406,

$$(d)\ldots p = h - z + \frac{\mu(n-s) + \nu(s-m)}{l};$$

p se mesure par la hauteur d'un prisme de fluide.

410. Les quantités révolutives qui entrent dans les valeurs de m et de u, résultent de la nature du mouvement oscillatoire, et nous en avons vu plusieurs exemples; pour pouvoir appliquer les équations qui les renferment, à des nombres, déterminons les constantes a et b, dans l'hypothèse que la masse fluide part de l'état de repos, lorsque $m = 0$, ou lorsque les origines de l et de m se confondent. L'intégrale première $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{2g}{l}(a^2 - r^2)$ de $\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{2g}{l} r = 0$, donne alors, à cause de la vîtesse $\frac{dr}{dt} = 0$ et de $r = e$, pour la constante a, la valeur $a = e$. D'après cette détermination, lorsque $m = 0$, l'équation (c) devient, en observant qu'on a en même temps $t = 0$, $\sin.\left\{b\sqrt{\frac{2g}{l}}\right\} = 1$; d'où $b\sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{1}{2}\pi$: ainsi $\sin.\left\{(t+b)\sqrt{\frac{2g}{l}}\right\} = \sin.\left\{t\sqrt{\frac{2g}{l}} + \frac{1}{2}\pi\right\} = \cos.\left\{t\sqrt{\left(\frac{2g}{l}\right)}\right.$ et $\cos.\left\{(t+b)\sqrt{\frac{2g}{l}}\right\} = \cos.\left(t\sqrt{\frac{2g}{l}} + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin.\left(\sqrt{t\frac{2g}{l}}\right)$. Ce qui donne pour les valeurs de m et de u,

$$m = e\left\{1 - \cos.\left(t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right)\right\}$$

$$u = \frac{e\sqrt{2g}}{l} \sin.\left(t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right)$$

Lorsque le fluide est de niveau dans les deux branches, on a $t = \frac{\frac{1}{2}\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$ et $u = \frac{e\sqrt{2g}}{l}$. C'est la moitié du temps écoulé entre les deux instans où la vîtesse est nulle.

Le temps entier écoulé entre les deux instans où la vîtesse est nulle,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$e - m$. On a de plus, à cause de la figure symétrique du tuyau, $\nu - \mu = -2r$, l'eau étant censée plus élevée dans la branche qui est du côté de l'origine de m, et où se trouve l'origine de l, que dans l'autre branche. $h =$ la hauteur d'un prisme d'eau qui aurait l'unité pour base, et dont le poids mesurerait la pression Π'.			271. Appliquer la solution du problème précédent, au cas où le fluide part de l'état de repos, et déterminer, 1.° L'espace parcouru et la vîtesse,

l'un desquels correspond à la plus grande valeur de m, se trouve, en faisant cos. $\left(t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right) = -1$; d'où $t\sqrt{\frac{2g}{l}} = \pi$; et la durée de cette oscillation est $= \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$, la longueur du pendule synchrone étant, art. 125, égale à $\frac{1}{2}l$.

411. L'EAU étant supposée se mouvoir dans un tuyau de courbure quelconque et d'amplitude ou grosseur uniforme, et un des points extrêmes de la veine d'eau étant sollicité par une puissance quelconque, tandis que le fluide s'écoule hors du tuyau, à l'autre extrémité de cette veine; pour trouver les circonstances du mouvement, on appliquera l'équation (2) de l'art. 403 aux deux points extrêmes de la veine; ce qui donnera une valeur de $f'(t)$, qui, égalée à la valeur fournie par l'équation $f'(t) = \frac{du}{dt} = \frac{d^2m}{dt^2}$, donne

$$\frac{d^2m}{dt^2} = \frac{g(H - h + \mu - v)}{a - m} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (e).$$

On trouve ensuite aisément,

$$p = \frac{(H + \mu)(a - s) + (h + v)(s - m)}{a - m} - z \dots (f).$$

412. LORSQUE la puissance H est constante ou fonction de m, l'équation (e) devient intégrable, et donne, en observant que μ est aussi fonction de m,

$$\frac{dm^2}{dt^2} = 2g\int \frac{[f(m) - h - v]\,dm}{a - m},$$

ce qui est la valeur du carré de la vîtesse.

413. SI $H = h$, cette équation devient

$$\left.\frac{dm^2}{dt^2} = 2g\int \frac{\mu - v}{a - m}\,dm\right\} \dots \mu \text{ est fonction de } m.$$

Il est aisé d'appliquer ces équations à des cas particuliers. Je passe à un problème qui est important pour les applications qu'on peut faire de sa solution.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			2.° La durée d'une oscillation et la longueur du pendule synchrone.
H et h sont respectivement les hauteurs des prismes d'eau, ayant l'unité pour base, dont les poids mesurent les pressions rapportées à l'unité de surface, qui s'exercent, 1.° à la première extrémité de la veine, 2.° à l'orifice par où l'eau de l'autre extrémité s'écoule. H est constant ou variable; h représente le poids de l'atmosphère.			272. Trouver les équations du mouvement d'une quantité initiale donnée, de fluide pesant et incompressible, dans un tuyau étroit de grosseur uniforme, ce fluide étant, à une des extrémités de la veine qu'il forme, sollicité par une puissance quelconque, et ayant son issue à l'autre extrémité, de manière que la quantité de fluide diminue sans cesse dans le tuyau.
$a =$ la longueur totale du tuyau, depuis un point fixe pris pour origine, jusqu'au point où se fait l'écoulement.			
$m =$ la longueur du tuyau, mesurée depuis l'origine de a, jusqu'à l'origine de la veine fluide où s'exerce la pression H.			273. Appliquer la solution du problème précédent, au cas où la puissance sollicitante est constante.
$s =$ la longueur du tuyau, depuis l'origine jusqu'à un point quelconque de la veine fluide.			
μ et ν sont les coordonnées verticales des deux extrémités de la veine; ν étant constante et appartenant au point où l'écoulement a lieu; μ étant variable.			
$z =$ la coordonnée verticale d'un point quelconque de la veine fluide.			

414. Un tuyau de courbure quelconque et d'amplitude ou de grosseur uniforme, a ses deux extrémités à différentes hauteurs; l'eau entre par l'extrémité inférieure, où elle se renouvelle sans cesse et où elle est refoulée par l'action d'une puissance donnée, variable ou constante, et sort par l'extrémité supérieure, qui n'éprouve que la pression de l'atmosphère; le tuyau entier est ainsi constamment plein, et il s'agit de déterminer les circonstances du mouvement.

L'équation (2) de l'article 403, considérée dans les points extrêmes du tuyau, où les pressions sont H et h respectivement, donne

$$f'(t) = \frac{g(H - h - b)}{l} = \frac{d\vartheta}{dt},$$

qui donne, en intégrant,

$$\vartheta = \frac{g}{l}\left\{\int H dt - (h + b)t\right\} + \text{constante};$$

et on trouve ensuite,

$$p = H - z - \frac{s(H - h - b)}{l},$$

415. Si une première impulsion donne une vîtesse initiale finie au fluide, et qu'ensuite le mouvement se perpétue au moyen d'une pression H constante, la vîtesse initiale augmentera, sera constante ou diminuera, suivant qu'on aura

$$H > h + b,\ H = h + b,\ H < h + b:$$

mais il faut observer que les moteurs qu'on applique à l'élévation de l'eau, et en général au mouvement des machines, n'exercent pas, par le fait, un effort constant; mais que cet effort a une certaine relation avec la vîtesse de l'eau ou de la machine. Ceci donnera lieu à des observations intéressantes, qui trouveront leur place dans la quatrième partie de cet ouvrage.

416. Il faut examiner maintenant les circonstances du mouvement de l'eau dans un vase étroit, dont l'amplitude ou section transversale varie d'un point à l'autre de son axe ou directrice, qui est une courbe quelconque, c'est-à-dire, reprendre, quant à la forme du vase, les

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
H = la hauteur variable constante d'un prisme d'eau ayant l'unité pour base, dont le poids mesure la pression de l'eau à l'extrémité inférieure du tuyau.			274. Trouver les équations du mouvement d'un fluide pesant et incompressible, dans un tuyau étroit de grosseur uniforme, le fluide entrant par une extrémité, où il est refoulé par l'action d'une puissance quelconque, et sortant par l'autre extrémité, de manière que le tuyau est entretenu constamment plein.
h = la hauteur de la portion du même prisme qui mesure la pression de l'atmosphère.			
s = la longueur du tuyau, depuis son extrémité inférieure jusqu'à l'un quelconque de ses points.			
l = la longueur totale du tuyau.			
z = la distance verticale d'un point quelconque du tuyau, au plan horizontal passant par son extrémité inférieure.			275. Déterminer, dans le cas du problème précédent, les phénomènes de mouvement qui ont lieu, lorsqu'une première impulsion donne une vîtesse initiale finie au fluide, et qu'ensuite le mouvement se perpétue au moyen d'une pression constante.
b = la distance du point le plus élevé du tuyau au même plan horizontal.			
			276. Trouver les équations du mouvement d'un fluide pesant et incompressible, dans un tuyau étroit de grosseur variable.

hypothèses des art. 399, 400 et 401. Les équations (1) de l'art. 401 deviennent, dans ce cas,

$$\left(\frac{d.\omega\upsilon}{ds}\right) = 0$$
Cette équation indique que $\omega\upsilon$ est uniquement fonction du temps, ou qu'à un instant déterminé $\omega\upsilon$ est le même pour toutes les sections transversales, et qu'on a $\omega\upsilon = \omega_, \upsilon_, = \omega_{,,}\upsilon_{,,}$, &c.

$$g\delta p = -g\delta z - \upsilon\delta\upsilon - \delta s\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right).$$

La première équation donne

$$(g)\ldots\omega\upsilon = \Omega v, \text{ d'où } \upsilon = \frac{\Omega v}{\omega}.$$

Faisant varier υ par rapport à s, et observant que Ωv est constant, on a $\delta\upsilon = -\frac{\Omega v.\delta\omega}{\omega^2}$; faisant ensuite varier υ par rapport à t, et observant que Ω et ω ne dépendent que de s, on a $\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) = \frac{\Omega}{\omega}\left(\frac{dv}{dt}\right)$, et ces valeurs, substituées dans la seconde équation ci-dessus, donnent

$$g\delta p = -g\delta z + \frac{\Omega^2 v^2 \delta\omega}{\omega^3} - \frac{\Omega\delta s}{\omega}.\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Intégrant, et observant, 1.° que les différentielles δp, δz et δs sont prises en regardant t comme constant, ou se rapportent aux états simultanés de deux molécules infiniment voisines; 2.° que $\Omega^2 v^2$ est dans cette hypothèse une quantité constante,

$$gp = F(t) - gz - \frac{\Omega^2 v^2}{2\omega^2} - \Omega\left(\frac{dv}{dt}\right)\int\frac{\delta s}{\omega}\ldots(h),$$

l'intégrale $\int\frac{\delta s}{\omega}$ est donnée quand on connaît la forme du vase, puisque ω est fonction de s seul.

417. Appliquant maintenant l'équation (h) de l'article précédent, aux sections O' et O'', on a

$$g\Pi_, = F(t) - g\mu - \frac{\Omega^2 v^2}{2\,O_,^2} - \Omega\left(\frac{dv}{dt}\right)\sigma_,,$$

$$g\Pi_{,,} = F(t) - g\nu - \frac{\Omega^2 v^2}{2\,O_{,,}^2} - \Omega\left(\frac{dv}{dt}\right)\sigma_{,,},$$

équations qui, soustraites l'une de l'autre, donnent

$$(k)\ldots g(\Pi_, - \Pi_{,,}) = g(\nu - \mu) + \frac{\Omega^2 v^2}{2}\left(\frac{1}{O_{,,}^2} - \frac{1}{O_,^2}\right) + \Omega\left(\frac{dv}{dt}\right)(\sigma_{,,} - \sigma_,).$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
s = la longueur du vase, mesurée sur l'axe ou directrice, à partir d'un point fixe. ω = la section transversale faite à l'extrémité de s, perpendiculairement à la directrice. Ω = la section transversale correspondante à un point déterminé de la directrice. u = la vîtesse, dans le sens de la directrice, de la tranche élémentaire de fluide qui passe par la section ω. v = la vîtesse simultanée, dans le sens de la directrice, de la tranche élémentaire de fluide qui passe par la section Ω. z = la distance verticale de la section ω, à un plan horizontal de position donnée. p et g ont la même signification qu'à l'art. 399. $\Pi_{,}$ et $\Pi_{,,}$ sont les pressions simultanées, rapportées à l'unité de surface, qui ont lieu à deux sections $O_{,}$ et $O_{,,}$, dont les distances à l'origine de s sont respectivement m et n, et dont les coordonnées verticales, ou les distances au plan horizontal qui passe par l'origine des z, sont respectivement μ et ν. $\sigma_{,}$ et $\sigma_{,,}$ sont les valeurs de $\int\frac{\delta s}{\omega}$, respectivement,		172. Lorsqu'un fluide incompressible se meut dans un tuyau de figure quelconque, le produit de chaque section perpendiculaire à l'axe ou directrice du tuyau, par la vîtesse des molécules fluides comprise dans cette section (vîtesse qui est supposée la même pour toutes les molécules d'une section) est, à un instant déterminé, une quantité constante dans toute l'étendue du tuyau.	

Si on soustrait de la première l'équation (h) de l'article précédent, on aura:

$$(l)\ldots g(\Pi_{,}-p)=g(z-\mu)+\frac{\Omega^2 v^2}{2}\left(\frac{1}{O_{,,}^2}-\frac{1}{O_{,}^2}\right)+\Omega\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\int\frac{\delta s}{\omega}-\sigma_{,}\right):$$

éliminant $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ entre ces deux dernières équations, il vient

$$\left\{g(p+z)+\frac{\Omega^2 v^2}{2\,\omega^2}\right\}(\sigma_{,,}-\sigma_{,})=\left\{\begin{array}{l}\left\{g(\Pi_{,}+\mu)+\frac{\Omega^2 vv}{2\,O_{,}^2}\right\}\left(\sigma_{,,}-\int\frac{ds}{\omega}\right)\\+\left\{g(\Pi_{,,}+\nu)+\frac{\Omega^2 vv}{2\,O_{,,}^2}\right\}\left(\int\frac{\delta s}{\omega}-\sigma_{,}\right).\end{array}\right.$$

Les quantités ω, $O_{,}$, $O_{,,}$, $\sigma_{,}$, $\sigma_{,,}$ et z, qui entrent dans cette équation, dépendant uniquement de la forme du vase, peuvent être regardées comme des fonctions de m. Si on eût soustrait la seconde équation ci-dessus de l'équation (h), on aurait eu

$$g(p-\Pi_{,,})=g(\nu-z)+\tfrac{1}{2}\Omega^2v^2(1:O_{,,}^2-1:\omega^2)+\Omega\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\sigma_{,,}-\int\frac{ds}{\omega}\right).$$

418. L'ÉQUATION (k) de l'article précédent, donne la valeur de v. On a pendant l'instant $dt\,\Omega v dt=O_{,}dm$, puisqu'il doit passer pendant cet instant la même quantité d'eau par les sections Ω et $O_{,}$; d'où $dt=\frac{O_{,}dm}{\Omega}$. Si on multiplie donc cette équation par $O_{,}dm$, elle deviendra

$$g\{\Pi_{,}-\Pi_{,,}+\mu-\nu\}\,O_{,}dm=\frac{\Omega^2v^2}{2}\,O_{,}dm\left(\frac{1}{O_{,,}^2}-\frac{1}{O_{,}^2}\right)+\Omega^2 v dv(\sigma_{,,}-\sigma_{,})\ldots(m),$$

bien entendu que dv est aussi l'accroissement de vîtesse qu'une même molécule acquiert pendant l'instant dt.

Cette équation se change en

$$2g\{\Pi_{,}-\Pi_{,,}+\mu-\nu\}\frac{O_{,}dm}{\sigma_{,,}-\sigma_{,}}=dU+\frac{U\,O_{,}dm}{\sigma_{,,}-\sigma_{,}}\left(\frac{1}{O_{,,}^2}-\frac{1}{O_{,}^2}\right)\ldots(n):$$

cette équation donne la valeur de U; d'où on déduit celle de $v=\frac{\sqrt{U}}{\Omega}$, et par suite celle de $t=\int\frac{O_{,}dm}{\sqrt{U}}$.

419. L'ÉQUATION (n) peut s'intégrer de la manière suivante. Observons que $O_{,}dm=O_{,,}dn$ (dm et dn sont des espaces parcourus

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
correspondantes aux sections $O_{,}$ et $O_{,,}$, c'est-à-dire qu'on a $\sigma_{,} = \int \frac{\delta m}{O_{,}}$ et $\sigma_{,,} = \int \frac{\delta n}{O_{,,}}$. dm = le chemin parcouru par la tranche en $O_{,}$, pendant que la tranche en Ω parcourt vdt; on écrit ici dm, au lieu de δm, pour faire voir qu'on différencie par rapport à t, ou qu'il s'agit du chemin parcouru par une même molécule pendant l'instant dt, au lieu que δm se rapporterait à l'état simultané de deux molécules infiniment voisines $\Omega^2 v^2 = U$; d'où $dU = 2\Omega^2 v dv$, en ne prenant la différentielle que par rapport au temps t, et regardant comme constante Ω, qui varie avec le lieu et non avec le temps.			277. Intégrer l'équation déduite de la solution du problème précédent, qui donne la vîtesse.

pendant l'instant dt), donne

$$\frac{O_{,}dm}{\sigma_{,,} - \sigma_{,}}\left(\frac{1}{O_{,,}^2} - \frac{1}{O_{,}^2}\right) = \frac{1}{\sigma_{,,} - \sigma_{,}}\left(\frac{dn}{O_{,,}} - \frac{dm}{O_{,}}\right).$$

ou, à cause de $\frac{dn}{O_{,,}} = d\sigma_{,,}$ et $\frac{dm}{O_{,}} = d\sigma_{,}$,

$$\frac{O_{,}dm}{\sigma_{,,} - \sigma_{,}}\left(\frac{1}{O_{,,}^2} - \frac{1}{O_{,}^2}\right) = \frac{d\sigma_{,,} - d\sigma_{,}}{\sigma_{,,} - \sigma_{,}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (n) de l'article précédent, et multipliant cette équation par $\sigma_{,,} - \sigma_{,}$, on a

$$2g(\Pi' - \Pi'' + \mu - \nu)\, O_{,}dm = dU(\sigma_{,,} - \sigma_{,}) + U(d\sigma_{,,} - \sigma_{,});$$

ce qui revient à multiplier l'équation (n) par e^Q, en faisant

$$(o)\ldots Q = \int\left\{\frac{O_{,}dm}{\sigma_{,,} - \sigma_{,}}\left(\frac{1}{O_{,}^2} - \frac{1}{O_{,,}^2}\right)\right\};$$

car alors $e^Q = \sigma_{,,} - \sigma_{,}$: le nombre e est celui dont le logarithme hyperbolique $= 1$.

L'intégrale de l'équation précédente donne

$$(p)\ldots U(\sigma_{,,} - \sigma_{,}) = \text{constante} + 2g\int\{(\Pi' - \Pi'' + \mu - \nu)\, O_{,}dm\}.$$

420. On a $U = \Omega^2 v^2$, $\sigma_{,} = \int \frac{dm}{O_{,}} = \frac{1}{\Omega^2 v^2}\int \frac{\Omega^2 v^2}{O_{,}^2} O_{,}dm$ (le produit Ωv est, à un instant déterminé, une quantité constante dans toute la masse), $\sigma_{,,} = \int \frac{dn}{O_{,,}} = \frac{1}{\Omega^2 v^2}\int \frac{\Omega^2 v^2}{O_{,,}^2} O_{,,}dn$. Ces valeurs, substituées dans le premier membre de l'équation (p), changent ce premier membre en $\int \frac{\Omega^2 v^2}{O_{,,}^2} O_{,,}dn - \int \frac{\Omega^2 v^2}{O_{,}^2} O_{,}dm$; mais $\frac{\Omega v}{O_{,}}$ et $\frac{\Omega v}{O_{,,}}$ étant respectivement les vîtesses des tranches élémentaires qui sont aux sections $O_{,}$ et $O_{,,}$, ou aux extrémités de m et de n, l'expression précédente est la différence entre les sommes des forces vives, depuis l'origine commune de m et n jusqu'aux sections $O_{,,}$ et $O_{,}$, c'est-à-dire qu'elle donne la somme des forces vives de tout le fluide compris entre ces deux sections. On a donc, à un instant déterminé,

Somme des forces vives du fluide entre les sections dont les pressions sont respectivement Π' et Π'' et les hauteurs respectives μ et ν, $= \textit{constante} + 2g\left\{\int[(\Pi' + \mu)\, O_{,}dm] - \int[(\Pi'' + \nu)\, O_{,,}dn]\right\}$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			278. Trouver, dans le cas des deux problèmes précédens, la somme des forces vives.
		173. La somme des forces vives est constante, lorsque la directrice du tuyau de grosseur variable est une droite horizontale, et que les pressions extrêmes sont égales.	

Cette somme = *constante*, lorsque la directrice du tuyau est une droite horizontale, et que les pressions Π' et Π'' sont égales.

421. Supposons que les sections $O_{\prime\prime}$ et Ω se confondent, et que Ω soit l'orifice ou section extrême du tuyau par où l'eau sort du vase sans se renouveler, en sorte que la longueur $n - m$ ou $a - m$ de la veine fluide diminue continuellement à mesure que l'eau s'écoule, la pression à l'orifice Ω étant celle de l'atmosphère. Supposons, de plus, que l'origine des z soit dans le plan horizontal passant par l'orifice $O_{\prime\prime}$ ou Ω; on aura, en faisant, conformément à ces hypothèses, $\nu = 0$, $\Pi' = H$, $\Pi'' = h$, dans l'équation (k) de l'art. 416, et dans celle qui termine le même article,

$$(q) \ldots g(H-h) = -g\mu + \tfrac{1}{2}v^2 - \frac{\Omega^2 v^2}{2^2 O_{\prime}^2} + \Omega\left(\frac{dv}{dt}\right)(\sigma_{\prime\prime} - \sigma_{\prime})$$

$$(r) \ldots g(p-h) = -gz + \tfrac{1}{2}v^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) + \Omega\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\sigma_{\prime\prime} - \int\frac{ds}{\omega}\right).$$

L'équation $O_{\prime}dm = \Omega v\,dt$ donne $dt = \frac{O_{\prime}dm}{\Omega v}$; et cette valeur, substituée dans l'équation (q), la change en

$$(s) \ldots g(H-h)O_{\prime}dm = -g\mu O_{\prime}dm + \tfrac{1}{2}v^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{O_{\prime}^2}\right)O_{\prime}dm + \Omega^2 v\,dv(\sigma_{\prime\prime} - \sigma_{\prime}),$$

La quantité $\Omega\frac{dv}{dt}$, éliminée entre les équations (q) et (r), donne

$$(t) \ldots g\left\{(H-h)\left(\sigma_{\prime\prime} - \int\frac{ds}{\omega}\right) + (h-p)(\sigma_{\prime\prime} - \sigma_{\prime})\right\} = \left\{\begin{array}{l} gz(\sigma_{\prime\prime} - \sigma_{\prime}) - g\mu\left(\sigma_{\prime\prime} - \int\frac{ds}{\omega}\right) \\ + \tfrac{1}{2}v^2\left(\sigma_{\prime} - \int\frac{ds}{\omega}\right) - \frac{\Omega^2 v^2}{2 O_{\prime}^2}\left(\sigma_{\prime\prime} - \int\frac{ds}{\omega}\right) \\ + \frac{\Omega^2 v^2}{2\omega^2}\sigma_{\prime\prime} - \sigma_{\prime}) \end{array}\right.$$

422. Prenons l'origine de m et de s à la section $O_{\prime\prime}$ ou Ω, c'est-à-dire, à l'orifice par où l'eau s'écoule, on aura $\sigma_{\prime\prime} = 0$, et les quantités m, $\frac{O_{\prime}dm}{\Omega v}$, s, $\int\frac{ds}{\omega}$ devront changer de signe dans les formules précédentes, où on aura, de plus, $\sigma_{\prime} = -\int\frac{dm}{O_{\prime}}$. Les

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$a =$ la longueur du tuyau, depuis un point fixe jusqu'à l'orifice d'écoulement $O_{\prime\prime}$ ou Ω. H et h sont les hauteurs de deux prismes du fluide ayant l'unité pour base, et dont les poids mesurent les pressions respectives en $O_{\prime}$ et Ω.			279. Trouver les lois du mouvement d'un fluide pesant et incompressible, dans un tuyau de grosseur variable, où l'eau ne se renouvelle point à mesure qu'elle en sort.

équations *(t)* et *(s)* de l'article précédent, deviendront respectivement,

$$g(H-h).\int\frac{ds}{\omega}+g(h-p)\int\frac{dm}{O_{,}}=\left\{\begin{array}{l} g z\int\frac{dm}{O_{,}}+\frac{1}{2}v^2\left\{\left(1-\frac{\Omega^2}{O_{,}^2}\right)\int\frac{ds}{\omega}-\right.\\ \left.\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\int\frac{dm}{O_{,}}\right\}-g\mu\int\frac{ds}{\omega},\end{array}\right.$$

$$g(H-h+\mu)O_{,}dm=\frac{1}{2}v^2\left(1-\frac{\Omega^2}{O_{,}^2}\right)O_{,}dm-\Omega^2 v dv\int\frac{dm}{O_{,}},$$

qui peut se mettre sous la forme

$$2\Omega^2 v dv\int\frac{dm}{O_{,}}+\frac{\Omega^2 v^2 dm}{O_{,}}-v^2 O_{,}dm+2g(H-h+\mu)O_{,}dm=0,$$

ou sous cette autre forme, en observant que Ω est une constante :

$$du-\frac{u\,O\,dm}{\Omega^2\int\frac{dm}{O_{,}}}+2g(H-h+\mu)O_{,}dm=0,$$

qui se change en

$$du+udT+2g(H-h+\mu)O_{,}dm=0,$$

et qui, multipliée par e^T (e est le nombre dont le logarithme hyperbolique $=1$), a pour intégrale, en observant que $e^T\,dt=d.e^T$,

$$ue^T+2g\int e^T(H-h+\mu)O_{,}dm=\text{constante.}$$

423. CETTE équation, réunie à la suivante,

$$dt=\frac{-O_{,}dm}{\Omega v},$$

doit donner les circonstances du mouvement dans chaque cas.

424. APPLIQUONS d'abord ces équations au cas d'un vase étroit, dont l'axe ou directrice est une ligne droite verticale, et dont les sections supérieure et inférieure sont horizontales ; l'eau s'écoule par la section ou orifice inférieur Ω, et le vase est supposé entièrement plein d'eau au premier instant.

On a, dans ce cas,

$\mu=m$, $z=s$
$\Pi'=\Pi''=h=H$

(μ, m, z et s sont quatre verticales égales deux à deux, qui ont leur origine à la section inférieure Ω, et qui se terminent, μ et m à la section $O_{,}$ ou surface supérieure du fluide z, et s à une section quelconque ω.)

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$\Omega^2 v^2 \int \frac{dm}{O_,} = u$; d'où $v^2 = \frac{u}{\Omega^2 \int \frac{dm}{O_,}}$ $\frac{-1}{\Omega^2} \int \frac{O_, dm}{\int \frac{dm}{O_,}} = T$; d'où $dT = \frac{-1}{\Omega^2} \frac{O_, dm}{\int \frac{dm}{O_,}}$, et $\frac{O_, dm}{\int \frac{dm}{O_,}} = \Omega^2 dT$.			280. Appliquer la solution du problème précédent, au cas d'un vase étroit dont l'axe ou directrice est une ligne droite verticale, et dont les sections supérieure et inférieure sont horizontales.

L'équation différentielle de l'article précédent, devient

$$du + udT + 2gO_{,}mdm = 0,$$

et la pression à une section quelconque se calcule par l'équation

$$g(h - p)\int\frac{dm}{O_{,}} = g\left(s\int\frac{dm}{O_{,}} - m\int\frac{ds}{\omega}\right) + \tfrac{1}{2}v^2\left\{\left(1 - \frac{\Omega^2}{O_{,}^2}\right)\int\frac{ds}{\omega} - \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\int\frac{dm}{O_{,}}\right\}.$$

425. L'ÉQUATION différentielle $du + udT + 2gO_{,}mdm = 0$, doit s'intégrer de manière qu'en faisant $m = a$, la vîtesse à l'orifice d'écoulement soit nulle ou qu'on ait $v = 0$; et v étant déterminé en fonction de m, on calculera le temps par l'équation

$$t = \int\frac{-O_{,}dm}{\Omega v} + \text{constante},$$

dans laquelle, faisant $m = a$, on a $t = 0$; et faisant $m = 0$, on a le temps total de l'écoulement.

426. LA plus grande vîtesse peut se déduire immédiatement de l'équation différentielle, en y faisant $dv = 0$; ce qui donne sur-le-champ,

$$v^2 = \frac{2gO_{,}^2m}{O_{,}^2 - \Omega^2} \text{ ou } v = \frac{O_{,}\sqrt{(2gm)}}{\sqrt{(O_{,}^2 - \Omega^2)}};$$

et il est à remarquer que cette vîtesse est plus grande que $\sqrt{(2gm)}$ ou que celle due à la hauteur m.

427. EN conservant l'hypothèse adoptée depuis l'art. 424, supposons le vase prismatique, où $O_{,} = \omega = O$; ce qui a lieu dans toute la hauteur du vase, excepté à l'orifice, où on a $\Omega < \omega$. on aura $T = -\frac{1}{\Omega^2}\int\frac{Odm}{\frac{1}{O}m} = -\frac{O^2}{\Omega^2}\int\frac{dm}{m} = \log. m^{-\lambda}$, d'où $m^{-\lambda} = e^T$, $dT = -\frac{O^2dm}{\Omega^2m} = -\frac{\lambda.dm}{m}$, et l'équation différentielle

$$du - \frac{O^2}{\Omega^2}\cdot\frac{udm}{m} + 2gOmdm = 0,$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
a = la longueur totale du tuyau ou la longueur de la veine d'eau au premier instant. La vîtesse v est supposée nulle à ce premier instant.			
		174. La plus grande vîtesse, dans le cas du problème 280, excède celle due à la hauteur du fluide dans le vase, au moment où cette plus grande vîtesse a lieu.	281. Déterminer, dans le cas du problème précédent, la valeur de la plus grande vîtesse.
O = section horizontale constante du prisme vertical.			282. Appliquer la solution du problème 279 au mouvement de l'eau dans un vase étroit prismatique ou cylindrique, et donner la valeur de la plus grande vîtesse.
$\frac{O^2}{\Omega^2} = \lambda$.			

qui, intégrée, donne

$$u = Cm^{\lambda} + \frac{2gO}{\lambda - 2} mm, \text{ ou } \frac{v^2 m \Omega^2}{O} = Cm^{\lambda} + \frac{2gO}{\lambda - 2} mm;$$

résultat qu'on obtient immédiatement, en faisant, dans l'équation intégrale de l'art. 422, $e^T = m^{-\lambda}$, $H - h = 0$, $\mu = m$ et $O_{,} = O$. Lorsque $m = a$, on a $v = 0$; d'où $C = -\frac{2gO^2}{\lambda - 2} a^{2-\lambda}$ et

$$v^2 = \frac{O^2}{\Omega^2} \cdot \frac{2gm}{\lambda - 2} \cdot (1 - a^{2-\lambda} \cdot m^{\lambda - 2}) = \frac{2g\lambda m}{\lambda - 2}\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right),$$

ou

$$v = \sqrt{\left[\frac{2g\lambda m}{\lambda - 2}\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right)\right]} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

La pression p, à l'extrémité de s ou de z, a pour valeur,

$$p = h + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}(m - s)\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right) \ldots (2),$$

qui se déduit de la dernière équation de l'art. 424.

Le temps t est donné par l'équation

$$(3) \ldots t = -\int \frac{dm\sqrt{(\lambda - 2)}}{2\sqrt{\left[\frac{1}{2}gm\left(1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}\right)\right]}}$$

qu'on trouve, en substituant la valeur de v ci-dessus, dans l'équation de l'art. 423, et observant que $\frac{O_{,}}{\Omega} = \frac{O'}{\Omega} = \sqrt{\lambda}$.

et la plus grande vîtesse $= \frac{O\sqrt{(2gm)}}{\sqrt{[(O^2 - \Omega^2)]}} = \frac{\sqrt{(2g\lambda m)}}{\sqrt{(\lambda - 1)}}$ déduite de l'équation de l'art. 426.

Pour trouver la valeur de m qui convient à cette vîtesse, il faut la mettre à la place de v dans l'équation (1); et on a

$$\frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} = 1 - \frac{m^{\lambda-2}}{a^{\lambda-2}}; \text{ d'où on tire } m = \frac{a}{(\lambda - 1)^{1:(\lambda-2)}}.$$

428. Lorsque $\lambda = 2$, c'est-à-dire, lorsque la section horizontale du cylindre est double de la surface de l'orifice, l'équation différentielle devient

$$du - \frac{2u\,dm}{m} + 2gOm\,dm = 0,$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			283. Examiner en particulier le cas où la section horizontale du vase prismatique ou cylindrique, mentionné au problème précédent, est double de la surface de l'orifice.

et donne, par l'intégration,

$$u = 2gOm^2 \log. \left(\frac{a}{m}\right), \text{ ou, } v^2 = 4gm \log. \frac{a}{m}.$$

On a, de plus,

$$t = -\int \frac{dm}{\sqrt{(2gm.\log.\frac{a}{m})}}, \quad p = h + (m - s) \log. \frac{a}{m}.$$

429. IMAGINONS un vase composé d'une partie prismatique verticale ouverte par le haut, et d'une autre partie de courbure quelconque; cette seconde partie formant le prolongement inférieur de la première, et ayant, à son extrémité, un orifice par où l'eau s'écoule : on aura, dans ce cas, en se rappelant que $\frac{O^2}{\Omega^2} = \lambda$,

$$T = -\frac{1}{\Omega^2}\int \frac{Od\xi}{B + \frac{\xi}{O}} = -\frac{O^2}{\Omega^2}\int \frac{d\xi}{OB + \xi}, \quad e^T = (BO + \xi)^{-\lambda},$$

valeur qui, substituée dans l'intégrale de l'article 422, donne, en faisant, après la substitution, $u = \lambda (B + \frac{\xi}{O}) v^2$,

$$v^2 = C(BO + \xi)^{\lambda - 1} - \frac{2\lambda g}{(1-\lambda)(2-\lambda)} \{(2-\lambda)b - BO + (1-\lambda)\xi\}.$$

La surface supérieure du fluide étant, au commencement du mouvement, supposée à la hauteur $b + c$ au-dessus de l'orifice Ω, on a en même temps $v = 0$ et $\xi = c$; ce qui donne

$$C = \frac{2\lambda g}{(1-\lambda)(2-\lambda)} \cdot \frac{(2-\lambda)b - BO + (1-\lambda)c}{(BO + c)^{\lambda - 1}},$$

et la valeur de v^2, sous les formes suivantes:

$$v^2 = \frac{2\lambda g[(2-\lambda)b - BO + (1-\lambda)c]}{(1-\lambda)(2-\lambda)} \left(\frac{BO+\xi}{BO+c}\right)^{\lambda-1} - \frac{2\lambda g[(2-\lambda)b - BO + (1-\lambda)\xi]}{(1-\lambda)(2-\lambda)}$$

$$v^2 = \frac{2\lambda g[(2-\lambda)b - BO]}{(1-\lambda)(2-\lambda)} \left\{\left(\frac{BO+\xi}{BO+c}\right)^{\lambda-1} - 1\right\} + \frac{2\lambda g}{2-\lambda}\left\{c\left(\frac{BO+\xi}{BO+c}\right)^{\lambda-1} - \xi\right\}$$

$$v^2 = \frac{-2\lambda g[BO + (\lambda-2)b]}{(\lambda-1)(\lambda-2)} \left\{1 - \left(\frac{BO+\xi}{BO+c}\right)^{\lambda-1}\right\} + \frac{2\lambda g}{\lambda-2}\left\{\xi - c\left(\frac{BO+\xi}{BO+c}\right)^{\lambda-1}\right\}.$$

Cette équation s'applique à toutes les époques du mouvement où la surface supérieure de l'eau est dans la partie cylindrique du vase; et

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
a = la longueur de la partie courbe du vase. c = la longueur de la partie prismatique verticale. b = la hauteur du point de réunion de a et c au-dessus de l'autre extrémité de a, où se trouve l'orifice Ω. ξ = la distance verticale de l'extrémité supérieure de a, à la surface supérieure du fluide, qu'on suppose n'être point abaissée au-dessous de la partie prismatique verticale du vase. s = la longueur du vase depuis la partie inférieure de b, ou de l'orifice Ω par où l'eau s'écoule, jusqu'à une section quelconque transversale de la partie courbe du vase. ω = la section transversale à l'extrémité de s. O = la section horizontale de la partie prismatique du vase. z = la hauteur verticale de ω au-dessus de l'orifice Ω. $m = a + \xi$ = la longueur du tuyau depuis l'orifice ω, jusqu'à la surface du fluide qu'on suppose n'être point abaissée au-dessous de la			284. Trouver les équations du mouvement d'un fluide pesant et incompressible, dans un vase étroit composé d'une partie prismatique verticale, ouverte par le haut, et d'une autre partie de courbure quelconque, cette seconde partie formant le prolongement inférieur de la première, et ayant à son extrémité un orifice par où l'eau s'écoule, sans se renouveler dans le vase; et déterminer, 1.° La vîtesse,

pour trouver le temps qu'elle emploie à descendre de la hauteur $b + c$ à la hauteur $b + \xi$, on a l'équation

$$dt = \frac{-d\xi\sqrt{\lambda}}{v};$$

La pression à un point quelconque de la partie courbe du vase, se déduit de la première équation de l'article 422, et est donnée par l'équation

$$g(h - p)(B + \frac{\xi}{O}) = (gz - \tfrac{1}{2}v^2)(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})(B + \frac{\xi}{O})$$
$$- \{g(b + \xi) - \tfrac{1}{2}v^2(1 - \frac{1}{\lambda})\}\int \frac{ds}{\omega};$$

d'où on tire

$$p = h + \frac{O(b + \xi) - \frac{(\lambda - 1)v^2}{2\lambda g}\int \frac{ds}{\omega}}{BO + \xi} + \frac{v^2}{2g}(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}) - z.$$

On trouverait aisément la pression à un point quelconque de la partie cylindrique située à une hauteur $b + n$ au-dessus de l'orifice, en mettant dans l'équation ci-dessus, n au lieu de ξ, $a + n$ au lieu de s, et faisant $\int \frac{ds}{\omega} = B + \frac{n}{O}$.

Enfin, la plus grande vîtesse a pour valeur :

$$\sqrt{\left(\frac{2\lambda g(b + \xi)}{\lambda - 1}\right)},$$

qui, mis à la place de v dans l'équation qui fournit la valeur générale de la vîtesse, donne, pour la hauteur correspondante de la surface supérieure de l'eau,

$$\xi = -BO + \frac{(BO + c)^{(\lambda - 1):(\lambda - 2)}}{[BO + (\lambda - 2)b + (\lambda - 1)c]^{1:(\lambda - 2)}}.$$

430. CONSIDÉRONS enfin le cas où un vase étroit, de forme quelconque d'ailleurs, est ouvert par ses deux extrémités, et, dépensant par l'une la même quantité d'eau qu'il reçoit par l'autre, se trouve ainsi entretenu constamment plein.

L'équation (h) de l'article 416 donne, dans ce cas,

$$gp = F(t) - gz - \tfrac{1}{2}.\frac{\Omega^2}{\omega^2}v^2 - \Omega\frac{dv}{dt}\int \frac{ds}{\omega},$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
partie prismatique verticale du vase.			
$\mu = b + \xi =$ la hauteur verticale au-dessus de l'orifice Ω de l'extrémité supérieure de m.			2.° La pression.
$B = \int \frac{ds}{\omega}$, prise dans toute l'étendue de la partie courbe du vase.			
$B + \frac{\xi}{\upsilon} = \int \frac{dm}{\upsilon}$, prise depuis l'orifice inférieur Ω, jusqu'à la surface supérieure du fluide dans la partie prismatique verticale du vase.			
$h =$ la hauteur représentant la pression que l'atmosphère exerce tant à la surface supérieure du fluide, qu'à l'orifice inférieur par où l'eau s'écoule.			
$\lambda = \frac{O}{\Omega}$.			
			3.° La plus grande vitesse.
			285. Trouver les équations du mouvement d'un fluide pesant et incompressible, dans un vase étroit, de forme quelconque d'ailleurs, ouvert par ses deux extrémités, et dépensant par l'une la même quantité de fluide qu'il reçoit par l'autre.
$\Omega =$ l'orifice par où l'eau s'écoule.			
$v =$ la vîtesse avec laquelle l'eau s'écoule.			
$O =$ l'orifice par où l'eau entre dans le tuyau.			
$\Pi =$ la pression à l'orifice O.			

qui, appliquée à l'orifice O, où on a $s = 0$, $\int \frac{ds}{\omega} = 0$, $z = a$; $p = \Pi$, et $\omega = O$, donne

$$g\Pi = F(t) - ga - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{-\Omega^2}{O^2} v^2;$$

ensuite, à l'orifice Ω, on a $\int \frac{ds}{\omega} = D$, $z = b$, $p = h$ et $\omega = \Omega$; ce qui donne

$$gh = F(t) - gb - \tfrac{1}{2} v^2 - \Omega D \frac{dv}{dt};$$

retranchant cette dernière équation de la précédente,

$$g(\Pi - h) = g(b - a) + \tfrac{1}{2} v^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) + \Omega D \frac{dv}{dt},$$

ou,

$$2g(\Pi - h + a - b)dt - v^2 dt\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) = 2\Omega D dv,$$

il n'y a de variables dans cette équation que v, Π et t; et Π doit être regardée comme une fonction de t, puisqu'elle exprime la pression d'un point fixe qui ne peut varier qu'avec le temps.

431 Supposons que la pression Π, à l'orifice d'entrée, soit constante, l'équation prendra la forme

$$dt = \frac{A\,dv}{B \pm Cv^2}.$$

L'intégration de cette équation présente trois cas; savoir :

Premier cas. $\Omega = O$; d'où $C = 0$, et $dt = \frac{A}{B} dv$.

Ce cas donne

$$v = \frac{B}{A} t + \textit{constante};$$

et si B est une quantité positive, la vîtesse augmente avec le temps.

Second cas. $\Omega < O$; d'où $C = 1 - \frac{\Omega^2}{O^2}$, et $dt = \frac{A\,dv}{B - Cv^2}$.

Ce cas donne

$$t = \frac{A}{2\sqrt{(BC)}} \log. \frac{\sqrt{B} + v\sqrt{C}}{\sqrt{B} - v\sqrt{C}} + \textit{constante}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$\omega =$ une section transversale quelconque du tuyau. $p =$ la pression à la section ω. $s =$ la longueur du tuyau comprise entre les sections O et ω. a, z et b sont respectivement les hauteurs verticales, au-dessus d'un plan horizontal de position fixe, des sections O, ω et Ω. $h =$ la pression de l'atmosphère qui s'exerce à l'orifice Ω. $g =$ la force accélératrice de la pesanteur terrestre.			
$D = \int \frac{ds}{\omega}$, prise dans toute l'étendue du tuyau, c'est-à-dire, depuis l'orifice O, jusqu'à l'orifice Ω. $A = 2\,\Omega\,D$. $B = 2g(\Pi - h + a - b)$. $\pm C = \frac{\Omega^2}{O^2} - 1$.		175. Lorsque l'orifice d'entrée, où le fluide est supposé refoulé par une puissance constante, égale ou surpasse l'orifice de sortie, la vîtesse croît avec le temps, indéfiniment dans le premier cas, et, dans le second cas, sans pouvoir excéder une certaine valeur finie.	286. Examiner ce que devient la solution du problème précédent, lorsque le fluide qui entre dans le vase, y est refoulé par une puissance constante, dans les cas, 1.° Où l'orifice d'entrée du vase est égal à l'orifice de sortie; 2.° Où l'orifice d'entrée est plus grand que l'orifice de sortie;

La constante est nulle, lorsque la vîtesse initiale l'est aussi, ou qu'on a en même temps $v = 0$ et $t = 0$; dans ce cas, la vîtesse, au bout du temps t, a pour valeur

$$v = \frac{(e^{2t\sqrt{BC:A}} - 1)\sqrt{B}}{(1 + e^{2t\sqrt{BC:A}})\sqrt{C}}.$$

On voit qu'elle croît avec le temps, sans néanmoins pouvoir excéder la valeur $\sqrt{\frac{B}{C}}$, valeur qui correspond à $t = \infty$.

Troisième cas. $\Omega > O$; d'où $C = \frac{\Omega^2}{O^2} - 1$, et $dt = \frac{A\,dv}{B + Cv^2}$.

Ce cas donne

$$t = \frac{A}{\sqrt{(BC)}} \cdot \text{arc tang.} \frac{v\sqrt{C}}{\sqrt{B}} + \text{constante.}$$

La constante est encore nulle, lorsqu'on a en même temps $t = 0$ et $v = 0$; et on a, dans cette hypothèse,

$$v = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{C}} \text{ tang.} \left\{ \frac{\sqrt{(BC)}}{A} t \right\}.$$

Ce cas est remarquable, en ce que la vîtesse est infinie, lorsque $\frac{\sqrt{(Bc)}}{A} t = \frac{1}{2}\Pi$ ou $t = \frac{\frac{1}{2}A\Pi}{\sqrt{(BC)}}$.

432. Pour obtenir la pression à un point quelconque du vase, il faut, dans l'avant-dernière équation de l'article 417, faire
$O_{,} = O$, $O_{,,} = \Omega$, $\sigma_{,} = 0$, $\sigma_{,,} = D$, $\Pi_{,} = \Pi$, $\Pi_{,,} = h$, $\mu = a$, $\nu = b$.
Cette équation deviendra

$$\left\{g(p + z) + \frac{\Omega^2 v^2}{2\,\omega^2}\right\} D = \left\{g(\Pi + a) + \frac{\Omega^2 v^2}{2\,O^2}\right\} \left(D - \int \frac{ds}{\omega}\right)$$
$$+ \left\{g(h + b) + \tfrac{1}{2} v^2\right\} \int \frac{ds}{\omega},$$

qui peut se mettre sous la forme

$$2g(p - \Pi + z - a)D = v^2\left(\frac{\Omega^2}{O^2} - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)D + v^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) \frac{ds}{\omega}$$
$$- 2g(\Pi - h + a - b) \int \frac{ds}{\omega}.$$

En faisant, dans cette équation, $p = h$; ce qui suppose $z = b$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		176. En conservant l'hypothèse d'une pression constante à l'orifice d'entrée ; le cas où cet orifice d'entrée est plus petit que celui de sortie, donne une vîtesse infinie au bout d'un temps fini.	3.° Où l'orifice d'entrée est plus petit que l'orifice de sortie.
π = la demi-circonférence qui a le rayon pour unité.			
			287. Trouver, dans le cas du problème 285, la valeur de la pression à un point quelconque.

et $\omega = \Omega$, on aura la relation entre la pression Π à l'orifice O par où le fluide entre dans le vase, et la vîtesse v de l'eau à la sortie Ω du vase : cet article, et les deux précédens, renferment ainsi des formules au moyen desquelles tous les phénomènes qui dépendent du mouvement se trouvent déterminés.

433. Supposons que la vîtesse est parvenue à l'uniformité, ou que la durée du mouvement a été telle qu'on a sensiblement $v = \sqrt{\frac{B}{C}}$ ou

$$2gO^2(\Pi - h + a - b) = v^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right);$$

et, à l'inspection de la valeur de v, art. 431, il est évident que, dans les cas les plus ordinaires, elle doit bientôt arriver à ce terme. L'équation qui donne la pression sera, (en observant que l'hypothèse de $v^2 = \frac{B}{C}$ donne $v^2 C - B = 0$ ou $v^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) - 2g(\Pi - h + a - b) = 0$),

$$2g(p - \Pi + z - a)D = v^2\left(\frac{\Omega^2}{O^2} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2}\right).$$

En faisant $p = h$, ce qui suppose $\omega = \Omega$ et $z = b$, cette équation devient

$$2g(h - \Pi + b - a)D = v^2\left(\frac{\Omega^2}{O^2} - 1\right).$$

Lorsque $\Omega = O$, on a $\Pi = h + b - a$: la pression à l'orifice d'entrée ne dépend plus de la vîtesse; la valeur de la vîtesse constante devient indéterminée ou $= \frac{0}{0}$; ce qui suit nécessairement de la valeur $v = \frac{B}{A}t$, art. 431.

Lorsque $O > \Omega$, la vîtesse constante devient $v = \frac{\sqrt{[2gO^2(\Pi - h + a - b)]}}{\sqrt{(O^2 - \Omega^2)}}$; et pour qu'elle soit réelle, ou que le fluide puisse y parvenir, on doit avoir $\Pi > (h - a + b)$.

434. Les formules données depuis l'art. 339, quoique établies sur l'hypothèse des tubes ou tuyaux infiniment étroits, s'appliquent néanmoins à un très-grand nombre de cas où les trois dimensions des vases sont de grandeur finie ; on obtiendra cet avantage toutes les fois

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			288. Appliquer les solutions des problèmes 285 et 286, au cas où la vîtesse est sensiblement parvenue à l'uniformité.
		177. Les formules relatives au mouvement des fluides incompressibles dans les tubes du tuyau,	

qu'il sera possible de faire, en un endroit quelconque du vase, une section telle que toutes les molécules renfermées dans cette section aient des vîtesses égales et parallèles : c'est en effet par cette dernière propriété que le mouvement est rendu *linéaire*, et qu'on parvient aux équations données depuis l'article cité.

La propriété dont je viens de parler, se rencontre évidemment dans les vases dont la longueur est considérable par rapport à leur plus grand diamètre, et qui ont, par conséquent, fort peu d'évasement.

435. Il est bon de faire, sur l'évasement, une remarque propre à résoudre quelques difficultés qui pourraient se présenter aux commençans dans l'étude de la théorie précédente. Le tube ou vase étant d'amplitude, ou section transversale variable, les vîtesses des différentes tranches, à un instant déterminé, dépendent des rapports des sections dont la *variabilité* joue, sous ce point de vue, un rôle très-important dans les phénomènes du mouvement. Il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit d'évaluer l'influence qu'ont sur le mouvement d'une tranche fluide, les différences de pression des deux sections transversales entre lesquelles cette tranche est contenue. Soit p la pression rapportée à l'unité de surface d'une section ω, la pression totale de cette section sera $p\omega$. Imaginons une tranche fluide renfermée entre ω et $\omega + d\omega$, la pression totale de $\omega + d\omega$ sera $(p + dp)(\omega + d\omega)$ ou $p(\omega + d\omega) + \omega dp$: or, on pourrait penser que l'excès de cette dernière force sur la première, ou la partie de la pression qui se combine avec la pesanteur pour produire la force accélératrice, est égale à $pd\omega + \omega dp$; mais il faut observer que, par la nature des fluides, art. 247, des pressions égales entre elles, lorsqu'on les rapporte à l'unité de surface, se font équilibre, quelles que soient les étendues des surfaces auxquelles on les applique : ainsi, dans les deux pressions opposées, $p\omega$ et $p(\omega + d\omega) + \omega dp$, les parties $p\omega$ et $p(\omega + d\omega)$ se font équilibre ou se détruisent réciproquement; et il ne reste plus que ωdp, qu'il faut combiner avec les autres puissances qui sollicitent la tranche.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		s'appliquent aux vases dont les trois dimensions sont de grandeur finie, dans tous les cas où il est possible de faire, en un endroit quelconque du vase, une section telle que toutes les molécules renfermées dans cette section aient des vîtesses égales et parallèles. 178. La différence entre deux sections infiniment voisines qui jouissent de la propriété énoncée dans le théorème précédent, n'entre pour rien dans l'évaluation de la partie de la pression de la tranche, comprise entre ces sections, qu'il faut combiner avec les puissances appliquées au fluide pour obtenir la force accélératrice de cette tranche.	

436. Il y a un cas très-remarquable de l'écoulement des fluides incompressibles et pesans, qui conduit à une valeur extrêmement simple de la vîtesse à la sortie du vase; c'est celui où on suppose que le fluide s'écoule par un orifice dont la surface est très-petite en comparaison d'une section transversale quelconque. Toutes les formules relatives à la vîtesse d'écoulement, données depuis l'article 399, s'accordent dans ce cas, quelle que soit l'inclinaison de l'orifice, à fournir l'équation suivante :

$$v = \sqrt{[2(gh + Q - P)]}.$$

437. On a vu précédemment, qu'il y avait un *maximum* de vîtesse auquel le fluide parvenait sensiblement dans un temps plus ou moins long : la grandeur de l'orifice influe principalement sur la durée de ce temps; et la vîtesse évaluée dans l'article précédent, doit être, dans les cas des articles cités, considérée comme un *maximum* de cette espèce, auquel le fluide arrive dans un temps si court qu'il est sensiblement inappréciable : c'est en l'envisageant sous ce point de vue, qu'on évite les difficultés qui embarrassent ordinairement la théorie des écoulemens par les petits orifices.

438. Lorsque l'écoulement se fait dans le vide ou dans un fluide élastique, comme l'air, qui presse également la surface supérieure du fluide et l'orifice, l'équation de l'article 436 devient

$$v = \sqrt{(2gh)}.$$

439. Le vase étant entretenu constamment plein, le volume de fluide qui s'écoule pendant un temps donné, est égal, dans l'hypothèse de l'article précédent, à

$$Q = \omega t \sqrt{(2gh)};$$

et, au moyen de cette équation, trois des quatre quantités Q, ω, h et t etant données, on pourra calculer la quatrième.

440. Lorsque le vase n'est pas entretenu constamment plein, les mêmes choses se calculent par l'équation

$$\Omega dz = \omega dt \sqrt{[2g(h - z)]},$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
g = la force accélératrice de la pesanteur. v = vîtesse à la sortie du vase. h = la différence de niveau entre la surface supérieure du fluide et l'orifice. Q et P sont les hauteurs de deux prismes du fluide qui s'écoule, ayant l'unité de surface pour base, dont les poids mesurent les pressions, rapportées à l'unité de surface, qui ont lieu respectivement à la surface supérieure du fluide et à l'orifice.		179. La vîtesse donnée par la solution du problème 289 est un *maximum* de vîtesse auquel le fluide parvient dans un temps si court, qu'il est sensiblement inappréciable.	289. Déterminer la vîtesse avec laquelle un fluide pesant et incompressible s'écoule par un orifice très-petit, en comparaison d'une section quelconque du vase.
ω = surface de l'orifice. Q = la quantité de fluide écoulée pendant le temps t. h et g ont la même signification qu'à l'art. 436. Ω = la section du vase à la surface supérieure du fluide, lorsque, au bout du temps t, cette surface supérieure s'est abaissée verticalement de la hauteur z.		180. La vîtesse d'écoulement, dans le cas du problème 290, est égale à celle due à la hauteur de la surface supérieure du fluide au-dessus de l'orifice.	290. Appliquer la solution du problème précédent, au cas où les pressions à la surface supérieure du fluide et à l'orifice sont nulles ou se détruisent, et trouver la quantité de fluide écoulée dans un temps donné, 1.° En supposant le vase entretenu constamment plein ; 2.° En supposant que le vase se vide sans réparer ses pertes ;

ou

$$dt = \frac{\Omega\, dz}{\omega \sqrt{[2g(h-z)]}},$$

dont le second membre ne renferme qu'une variable, parce que Ω est fonction de z.

441. Dans le cas d'un cylindre ou d'un prisme dont l'axe ou les arêtes longitudinales seraient verticales, on a, pour l'écoulement sur une hauteur z,

$$t = \frac{2\Omega}{\omega\sqrt{(2g)}} \left[h^{\frac{1}{2}} - (h-z)^{\frac{1}{2}} \right];$$

et, pour l'écoulement total sur la hauteur h,

$$t = \frac{2\Omega \sqrt{h}}{\omega\sqrt{(2g)}}:$$

ce temps total est double de celui employé à faire la même dépense d'eau, lorsque le vase est entretenu constamment plein à la hauteur h.

442. L'équation $\frac{dt}{dz} = \frac{\Omega}{\omega\sqrt{[2g(h-z)]}}$, donnée art. 440, renferme le principe de la construction des *clepsydres* ou horloges d'eau. Si la forme de la clepsydre est donnée, en intégrant l'équation précédente, on en tire $z =$ fonction (t); au moyen de quoi on peut calculer les divisions de l'axe vertical z, correspondantes aux divisions égales du temps : les divisions de z seront, dans ce cas, généralement inégales ; mais, pour avoir ces divisions égales, il faut faire $\frac{dz}{dt} = a =$ la hauteur constante dont on veut que le fluide s'abaisse pendant chaque unité de temps (l'unité de temps doit être la même que celle employée dans la détermination de g), et on aura l'équation

$$a\Omega = \omega \sqrt{[2g(h-z)]}.$$

Supposant, ainsi que cela est convenable, que la clepsydre est symétrique par rapport à l'axe vertical des z, on pourra se donner arbitrairement l'aire de la section Ω en fonction d'une coordonnée horizontale y; et l'équation $f(y) = \frac{\omega}{a} \sqrt{[2g(h-z)]}$ sera celle du profil

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
h = la différence de niveau, initiale, ou prise, lorsque $t = 0$, entre la surface supérieure du fluide et l'orifice.		181. Un vase ayant la forme d'un cylindre ou d'un prisme vertical, emploie à se vider entièrement par un petit orifice pratiqué à sa base, un temps double de celui qui serait nécessaire pour faire la même dépense de fluide, si le vase était entretenu constamment plein à la hauteur où était la surface supérieure du fluide au commencement du mouvement.	3.° Lorsque le vase qui se vide sans réparer ses pertes, est un cylindre ou un prisme dont l'axe ou les arêtes longitudinales sont verticales.
			291. Exposer les principes et donner les formules fondamentales qui servent à la construction des *clepsydres* ou horloges d'eau, 1.° Lorsqu'on veut diviser l'axe vertical, en se servant d'un vase donné ; 2.° Lorsqu'on veut construire une clepsydre dans laquelle des divisions égales de l'axe répondent à des temps égaux.
f est le signe de fonction.			

horizontal de la clepsydre. On peut aisément donner à cette détermination plus de généralité ; mais ce serait en pure perte pour les objets d'application.

443. On a appliqué la théorie de l'écoulement de l'eau par les petits orifices, aux cas des orifices verticaux dont la grandeur est telle par rapport à la charge d'eau, ou à la hauteur de la surface supérieure du fluide, qu'on ne peut pas supposer des vîtesses égales à toutes les molécules renfermées dans ces orifices. Cette application a été fondée sur l'hypothèse que l'inégalité de vîtesse ne pouvait avoir lieu qu'entre les molécules situées à différentes hauteurs, ou dont les distances à la surface supérieure du fluide n'étaient pas les mêmes ; tandis que les molécules situées dans une même ligne horizontale, ou entre deux lignes horizontales infiniment voisines, devaient se mouvoir avec la même vîtesse : on a ensuite supposé que cette dernière vîtesse était celle due à la hauteur de la surface supérieure de l'eau au-dessus de chaque molécule, raisonnant, en cela, par analogie avec ce qui se passe dans le cas des petits orifices.

Voici les formules auxquelles cette manière d'envisager la question a conduit.

L'écoulement pendant un temps t, par la partie de l'orifice comprise entre son point le plus haut et l'ordonnée horizontale y, a pour valeur, lorsque le vase est entretenu constamment plein,

$$Q = (2g)^{\frac{1}{2}} t \left\{ \int \left[y dx (h' + x)^{\frac{1}{2}} \right] + \text{constante} \right\}.$$

Le périmètre de l'orifice étant donné, y est connu en fonction de x. On détermine la constante par la condition que $\int \left[y dx (h' + x)^{\frac{1}{2}} \right]$ s'évanouit, lorsque $x = 0$; et l'intégration finie, pour avoir la dépense de l'orifice entier, on fera $x = h - h'$.

444. La *hauteur moyenne de l'eau*, pour une partie quelconque de l'orifice comprise entre son point le plus haut et l'ordonnée horizontale y, est la hauteur due à une vîtesse telle, que, si elle était commune à toutes les molécules fluides renfermées dans la portion de l'orifice dont je viens

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			292. Trouver le rapport entre le temps et la dépense, lorsqu'un fluide pesant et incompressible sort d'un vase entretenu constamment plein, par un orifice vertical de grandeur finie.
g = la force accélératrice de la pesanteur. Q = la quantité de fluide qui s'écoule pendant le temps t. h et h' sont respectivement les distances verticales de la surface supérieure du fluide, aux points le plus bas et le plus haut de l'orifice. y est la distance entre deux points quelconques de l'orifice, situés sur la même ligne horizontale. x = l'abaissement de y au-dessous du point le plus haut de l'orifice.	65. De la *hauteur moyenne*, lorsqu'un fluide pesant s'écoule par un orifice vertical de grandeur finie.		293. Déterminer, dans le cas du problème précédent, la valeur de la hauteur moyenne.

de parler, la dépense par cette portion d'orifice serait la même que celle qui a effectivement lieu. On a pour la hauteur moyenne

$$k = \frac{\{A + \int[y\,dx\,(h' + x)^{\frac{1}{2}}]\}^2}{(B + \int y\,dx)^2}.$$

Les constantes A et B se déterminent par la considération que les intégrales s'évanouissent lorsque $x = 0$; et lorsque l'intégration est effectuée, on a la hauteur moyenne, pour tout l'orifice, en faisant $x = h - h'$.

445. LORSQUE le vase se vide sans recevoir de nouvelle eau, la relation entre le temps et la quantité de fluide écoulée, est donnée par l'équation

$$t = \frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}} \int \frac{\Omega\,dz}{A + \int[y\,dx\,(h' + x - z)^{\frac{1}{2}}]} + B.$$

On intègre d'abord la quantité $\int[y\,dx\,(h' + x - z)^{\frac{1}{2}}]$, en regardant z comme constante, et on détermine la constante A, par la condition que l'intégrale s'évanouit lorsque $x = 0$: faisant ensuite $x = h - h'$, et observant que Ω est fonction de z, la valeur du temps prend la forme $t = \frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}}.\,dz\,f(z) + B$, et la constante B se détermine par la condition que z et t sont zéro en même temps.

446. L'HYPOTHÈSE, admise dans les deux articles précédens, de l'égalité de vîtesse pour les molécules fluides qui, à l'orifice, sont comprises entre deux lignes droites horizontales infiniment voisines, peut ne pas s'écarter beaucoup de la vérité. Il n'en est pas de même de l'hypothèse qui rend cette vîtesse proportionnelle à la racine carrée de la distance verticale de la molécule à la surface supérieure du fluide; et en conservant même la forme des équations qui donnent Q et t, il faut, au lieu de $\sqrt{(h' + x)}$, art. 443, ou de $\sqrt{(h' + x - z)}$, art. 445, y mettre plus généralement $f(h' + x), f(h' + x - z)$; et alors l'embarras est de connaître cette fonction. On ne doit donc introduire qu'avec beaucoup de précaution dans les applications aux objets de pratique l'hypothèse dont je viens de parler; et ce ne serait pas même assez de se contenter de la

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
k = la *hauteur moyenne de l'eau*, rapportée à la partie de l'orifice qui répond à toute la longueur de x, ou qui est au-dessus de l'horizontale y. z = la hauteur verticale dont la surface supérieure du fluide est descendue pendant le temps t.		182. Des deux hypothèses énoncées art. 446, et sur lesquelles sont fondées les solutions des problèmes 292 et 294, celle qui suppose la vîtesse d'une molécule passant par l'orifice, proportionnelle à la racine carrée de sa distance verticale à la surface supérieure du fluide, s'éloigne beaucoup de l'expérience, dans plusieurs cas, et ne doit être appliquée qu'avec précaution. On peut, sans changer la forme des équations qui résolvent les problèmes cités, substituer à la racine carrée de la hauteur, une fonction de la hauteur; mais la forme de cette fonction n'est pas connue.	294. Trouver la relation entre le temps et la dépense, lorsque le fluide s'échappe, par un orifice vertical, d'un vase qui se vide sans recevoir de nouvelle eau.

correction relative à la contraction de la veine fluide dont je vais bientôt parler. En effet, en supposant la vîtesse proportionnelle à $\sqrt{(h' + x)}$, si le point le plus haut de l'orifice était à la surface supérieure du fluide, ou près de cette surface, les molécules qui y passeraient, auraient une vîtesse nulle ou extrêmement petite; ce qui est tout-à-fait contraire à l'expérience. Cependant, comme plusieurs résultats déduits des formules citées, ont été employés utilement par les praticiens, en y faisant les modifications convenables, j'ai cru que je ne pouvais pas me dispenser de rapporter ces formules dans mon ouvrage.

447. Mais il y a des corrections communes, non-seulement aux résultats ci-dessus mentionnés, mais encore à tous ceux que peut fournir la théorie de l'écoulement des fluides par des orifices quelconques. On a reconnu que, lorsqu'un fluide incompressible s'échappe d'un vase par une ouverture que je supposerai circulaire, le jet n'avait pas une forme cylindrique, et diminuait progressivement de diamètre depuis l'orifice jusqu'à une certaine distance, peu différente, dans beaucoup de cas, du demi-diamètre de cet orifice. Ainsi le jet affecte, dans cet intervalle, la forme d'un cône tronqué, dont la grande base est l'orifice lui-même. Or, pour évaluer la dépense, il faut, à cet orifice, substituer la petite base du cône tronqué, qui renferme tous les filets fluides jaillissant hors du vase, lorsqu'on connaît ou la vîtesse commune ou la vîtesse moyenne de ces filets. La diminution du diamètre du jet, depuis l'orifice jusqu'à une certaine distance de cet orifice, est ce qu'on a appelé *contraction de la veine fluide.*

448. L'expérience a appris que, lorsque l'eau s'écoulait d'un vase par un petit orifice percé dans une même paroi, la dépense effective était à-peu-près 0.62 de la dépense théorique calculée par la formule de l'article 439.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	66. De ce qu'on entend par *contraction de la veine fluide.*	183. Lorsqu'un fluide pesant et incompressible s'échappe d'un vase par un orifice circulaire, le jet affecte, à sa sortie, la forme d'un cône tronqué dont la grande base est l'orifice. Un rétrécissement analogue du jet a lieu généralement, quelle que soit la forme de l'orifice. La section de ce jet, faite à l'endroit de son plus grand rétrécissement, multipliée par la vîtesse moyenne des molécules fluides qui passent par cette section, donne la dépense faite dans une unité de temps. 184. Lorsque l'eau s'écoule d'un vase par un petit orifice circulaire percé dans une mince paroi, la dépense effective est à-peu-près 0,62 de la dépense théorique, calculée par les formules des art. 439 et 440. Le même	

449. Ce déchet est occasionné par la contraction de la veine fluide; et il demeure le même, si l'on adapte à l'orifice un ajutage, dont la longueur soit égale à la distance de cet orifice à la section de plus grande contraction, et dont la paroi intérieure ait la forme conoïde, affectée dans cet intervalle par le fluide. Mais si, à la suite de cet ajutage, on place un tuyau cylindrique d'un diamètre égal à celui de l'orifice, supposé circulaire, ou un tuyau conique, ou enfin un tuyau en partie cylindrique et en partie conique, les longueurs et l'évasement n'excédant pas certaines limites, la dépense, dans un temps donné, augmente et peut excéder le double de celle qui se fait par une mince paroi. Cette augmentation de dépense varie avec les proportions des ajutages qui comportent un *maximum* et un *minimum ;* cependant les connaissances sur cette matière ne sont pas assez avancées, pour établir ces proportions et la forme rigoureuse des ajutages, d'après des règles susceptibles d'être mises en formules.

450. Cet écoulement par les ajutages a offert un phénomène remarquable. Si l'on fait la plus légère ouverture près de l'endroit où est la plus grande contraction de la veine, l'augmentation de dépense n'a pas lieu; et, en adaptant au tuyau additionnel des syphons dont les branches inférieures trempent dans l'eau ou le mercure, il y a aspiration

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		effet a lieu, si l'on adapte à l'orifice un ajutage dont la longueur soit égale à la distance de cet orifice à la section de plus grande contraction, et dont la paroi intérieure ait la forme du conoïde, affecté dans cet intervalle par le fluide. 185. Si, à la suite de l'ajutage mentionné au théorème précédent, on place un tuyau cylindrique d'un diamètre égal à celui de l'orifice, supposé circulaire, ou un tuyau conique, ou enfin un tuyau en partie cylindrique et en partie conique, les longueurs et l'évasement n'excédant pas certaines limites, la dépense, dans un temps donné, augmente et peut excéder le double de celle qui se fait par une mince paroi: cette augmentation de dépense varie avec les proportions des ajutages qui comportent un *maximum* et un *minimum*. 186. Si l'on fait la plus légère ouverture près de l'endroit où est la plus grande contraction, l'augmentation de dé-	

dans chacune de ces branches, qui diminue à mesure que le syphon est plus éloigné de la section de plus grande contraction.

451. ENFIN, la différence entre la dépense par un orifice percé dans une mince paroi, et celle par un tuyau additionnel, n'a pas lieu dans le vide. On voit, par ces divers phénomènes, que le poids de l'atmosphère a une influence totale ou presque totale sur l'excès de produit des tuyaux additionnels.

452. UN habile physicien de Modène, *J. B. Venturi,* a essayé de lier les faits que je viens de rapporter, à un principe ou fait primitif, qui doit trouver sa place ici comme phénomène du mouvement des fluides, quel que soit le jugement qu'on porte sur les conséquences que *Venturi* en tire. Si l'on introduit un filet d'eau avec une certaine vîtesse dans un vase rempli du même fluide stagnant, à la surface duquel il s'échappe en suivant la direction d'un canal curviligne ouvert dans toute sa longueur, ce filet entraînera avec lui et fera sortir du vase le fluide qui y est contenu; de manière qu'au bout d'un certain temps, il n'en restera que la portion comprise entre le fond du vase, et la partie inférieure de l'ouverture par laquelle entre le filet. *Venturi* a nommé cet effet, *communication latérale du mouvement dans les fluides,* et il y rapporte plusieurs circonstances importantes de ce mouvement. Il ne donne aucune explication du principe, et conclut même de ses expériences, que

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		pense n'a pas lieu ; et en adaptant au tuyau additionnel, des syphons dont les brauches inférieures trempent dans de l'eau ou du mercure, il y a aspiration dans chacune de ces branches, qui diminue à mesure que le syphon est plus éloigné de la section de plus grande contraction.	
		187. La différence entre la dépense par un orifice percé dans une mince paroi et celle par un tuyau additionnel, n'a pas lieu dans le vide.	
	67. *De la communication latérale du mouvement* dans les fluides.	188. Si l'on introduit un filet d'eau avec une certaine vitesse dans un vase rempli de même fluide stagnant, à la surface duquel il s'échappe en suivant la direction d'un canal curviligne ouvert dans toute sa longueur, ce filet entraînera avec lui et fera sortir du vase le fluide qui y est con-	

l'attraction réciproque des molécules d'eau est très-insuffisante pour en rendre raison : il a publié le résultat de ses recherches, dans un ouvrage qui contient beaucoup de choses curieuses et utiles, et qui a obtenu le suffrage de l'Institut national des sciences et des arts *.

453. Il me reste, pour terminer ce que j'ai à dire sur les fluides incompressibles, à donner quelques résultats sur leur *choc* et leur *résistance*. Si un fluide en mouvement agit sur un corps en repos, il lui communique une vîtesse finie au bout d'un temps fini, après l'avoir fait passer par tous les degrés de vîtesse intermédiaire, entre la vîtesse zéro et celle que le corps a au bout du temps t. Le fluide agit donc à la manière des puissances accélératrices, dont l'effet, soumis à la loi de continuité, s'accroît par degrés insensibles ; et la *force motrice* $\frac{Mdv}{dt}$ est la mesure de ce qu'on appelle le *choc du fluide*.

Si, au contraire, un corps animé d'une vîtesse initiale est lancé dans un fluide, cette vîtesse initiale diminue graduellement, en suivant aussi la loi de continuité : la perte de quantité de mouvement pendant l'instant dt, est Mdv ; et $\frac{Mdv}{dt}$ est, dans ce cas, la mesure de ce qu'on appelle *résistance du fluide*.

On a très-souvent confondu les phénomènes de mouvemens qui se rapportent au *choc*, avec ceux qui se rapportent à la *résistance ;* ils offrent néanmoins des nuances dont il faudrait rendre raison et tenir compte, si les problèmes auxquels ils donnent lieu étaient résolus d'une manière satisfaisante : mais nous sommes bien éloignés de jouir d'un pareil avantage, cette partie de la mécanique étant, en même temps,

* Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides, &c. Paris, chez *Houel, Ducros* et *Barrois*.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		tenu, de manière qu'au bout d'un certain temps il n'en restera que la portion comprise entre le fond du vase et la partie inférieure de l'ouverture par laquelle entre le filet.	
M = la masse du corps. v = la vîtesse. t = le temps.	68. De ce qu'on entend par *choc* et *résistance* des fluides.	189. Lorsqu'un corps en mouvement choque un fluide, et réciproquement, les variations de la vîtesse du corps se font par degrés insensibles ; c'est-à-dire que l'effet du choc du de la résistance des fluides sur le mouvement des corps, est comparable à celui des forces accélératrices ou retardatrices.	

l'une des plus importantes pour les applications, et l'une des moins avancées pour la théorie.

454. Lorsqu'un corps s'avance dans un fluide en repos, il se forme tout autour de ce corps une *dénivellation* qui consiste en ce que le fluide s'élève au-dessus de son niveau à la partie antérieure du corps, où se forme ce qu'on appelle le *remou*. Depuis le sommet de ce *remou*, le fluide s'abaisse graduellement le long des faces latérales du corps, jusqu'à l'arrière de ce corps, où est son plus grand abaissement, et où se forme une cavité dont le fond est au-dessous de la surface horizontale du fluide. On peut, depuis le fond de cette cavité jusqu'au sommet du remou, imaginer une ligne courbe tracée sur le corps, dont tous les points sont à différentes hauteurs, et qui est l'intersection de la surface du corps et de la surface *dénivelée* du fluide.

Des phénomènes à-peu-près semblables ont lieu lorsque le fluide en mouvement choque un corps en repos : la théorie rigoureuse tiendrait compte, dans ce second cas, de quelques différences relatives à la direction inclinée des molécules d'un fluide en mouvement, à la différence de vîtesse des molécules en *amont* et en *aval* du corps, &c.

On voit donc que, soit pour la *résistance*, soit pour le *choc* des fluides, il faut avoir égard non-seulement à la forme et à l'étendue de la proue ou face antérieure du corps, mais encore à celles des faces latérales et postérieures; faire entrer en compte les différentes hauteurs du fluide, au-dessus et au-dessous de son niveau, tout autour du corps; considérer les abaissemens de chaque élément submergé de la surface de ce corps au-dessous de la surface, non pas *horizontale*, mais *dénivelée*, du fluide, &c., &c.

Les formules dont on se sert usuellement pour calculer le choc ou la résistance des fluides, sont bien loin de renfermer tous ces élémens. Si l'on suppose, par exemple, qu'un parallélipipède rectangle a quatre de ses arêtes horizontales, et qu'il se meut dans un fluide parallélement à ces quatre arêtes, les formules dont je parle font sa *force retardatrice*,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
	69. De ce qu'on appelle *dénivellation* et *remou* dans le choc et la résistance des fluides.	190. La *dénivellation* est un phénomène commun au *choc* et à la *résistance* des fluides.	

simplement proportionnelle au produit de la partie de la face antérieure, perpendiculaire aux quatre arêtes horizontales, qui est au-dessous de la surface horizontale du fluide, par le carré de la vîtesse. Je donnerai tout-à-l'heure les considérations au moyen desquelles on peut parvenir à ce résultat : mais je vais les faire précéder de quelques mots sur un essai de théorie qui, si elle ne donne pas la mesure absolue des effets observés dont j'ai parlé plus haut, indique du moins des effets semblables, en ce qu'elle conduit à des formules d'où on déduit la *dénivellation*, le *remou* en avant, l'*abaissement* en arrière, &c., et qui fournissent le moyen d'avoir égard à la forme du corps, à ses dimensions, aux différens enfoncemens des élémens submergés de la surface, &c. &c. Cet essai, je le répète, offre plutôt l'*image* que la réalité d'une théorie physiquement applicable ; et malgré cela je crois faire plaisir à plusieurs de mes lecteurs, en en donnant ici une idée générale.

455. Un corps étant en mouvement dans un fluide, imaginons qu'il est coupé par quatre plans; savoir, deux plans horizontaux infiniment près l'un de l'autre, et deux plans verticaux aussi infiniment voisins, et perpendiculaires aux courbes d'intersection de la surface du corps et des plans horizontaux. La petite surface commune aux deux zones, horizontale et verticale, produites par ces intersections, sera une différentio-différentielle de la surface du corps ; et ayant les formules qui donnent, dans tous les cas, la pression de cet élément de surface, on pourra, avec le secours du calcul intégral, calculer la pression d'une étendue finie de la surface du corps. Voici les considérations au moyen desquelles on évalue la pression de la différentio-différentielle de surface.

ω étant un orifice infiniment petit, et h sa distance à la surface supérieure du fluide, la vîtesse u avec laquelle le fluide jaillirait par cet orifice, est égale à $\sqrt{(2gh)}$, et on a $u^2 = 2gh$.

Supposons cet orifice fermé par un plan ou lame plane; la portion de cette lame qui se trouvera dans le plan de l'orifice, éprouvera une pression absolue p, égale à ωgh (la densité du fluide est prise pour unité). Substituant, dans cette expression, pour h sa valeur $\frac{u^2}{2g}$, on a $p = \frac{\omega u^2}{2}$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			295. Un corps étant en mouvement dans un fluide, trouver la résistance qu'éprouve un élément différentio-différentiel de la surface de ce corps, dans le cas où la direction du mouvement est perpendiculaire au plan de l'élément de surface.
p = la pression normale d'un élément differentio-différentiel de surface ω qui se meut avec une vîtesse u.			

Qu'on imagine à présent que cet élément se meut perpendiculairement à son plan (le plan tangent qui a cet élément commun avec la surface du corps) avec une vîtesse U, et de manière qu'il ne rencontre le fluide qu'à sa partie antérieure, ce qu'on peut concevoir, en supposant qu'il se meut dans un petit canal où le fluide ne peut entrer que d'un côté; alors le fluide tendra à jaillir avec une vîtesse $u \pm U$, suivant que l'élément de surface ira à la rencontre ou s'éloignera du fluide. Il faudra donc, pour ce cas, substituer, dans l'équation $p = \frac{\omega u^2}{2}$, à la vîtesse u la vîtesse $u \pm U$ ou $(2gh)^{\frac{1}{2}} \pm U$; ce qui donnera, pour la pression, l'équation

$$p = \tfrac{1}{2}\omega\left[(2gh)^{\frac{1}{2}} \pm U\right]^2.$$

456. ω est l'élément différentio-différentiel de surface dont on a expliqué la formation au commencement de l'article précédent, égal en surface à $da\,dh$: sin. f; et si cet élément se meut dans une direction qui fasse un angle λ avec son plan, la pression qu'il éprouvera, perpendiculairement à ce même plan, aura pour valeur

Pression normale... } .... $\frac{da\,dh}{\sin. f}\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\nu \sin. \lambda}{\sqrt{(2g)}}\right)^2.$

Pression dans une direction qui fait un angle quelconque avec le plan de l'élément de surface...

Cette pression, évaluée dans une direction quelconque qui fait un angle $\theta_{,}$ avec le plan horizontal passant par la base de l'élément et dont la projection sur ce plan horizontal, fait un angle $\varkappa_{,}$ avec la ligne droite perpendiculaire à la même base; cette pression, dis-je, se calcule par l'une des formules

$$da\,dh\,(\cos. \varkappa_{,} \cos. \theta_{,} + \sin. \theta_{,} \cot. f)\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\nu \sin. \lambda}{\sqrt{(2g)}}\right)^2$$

$$dh\,dk\left(\cos \theta_{,} + \frac{\sin. \theta_{,} \cot. f}{\cos. \varkappa_{,}}\right)\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\nu \sin. \lambda}{\sqrt{(2g)}}\right)^2$$

$$da\,dg\,(\cos. \varkappa_{,} \cos. \theta_{,} \tan g. f + \sin. \theta_{,})\left(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\nu \sin. \lambda}{\sqrt{(2g)}}\right)^2.$$

Si l'on nomme ε l'angle formé par la direction dans laquelle on considère la pression et par le plan de l'élément différentio-différentiel, on aura, f étant l'angle formé par cet élément et par l'horizon,

$$\sin. \varepsilon = \sin. f \cos. \varkappa_{,} \cos. \theta_{,} + \cos. f \sin. \theta_{,} :$$

on a de plus

$$da = \frac{dk}{\cos. \varkappa_{,}}, \quad dh = dg \tan g. f;$$

ce qui fait voir comment la seconde équation ci à côté se déduit de la première, et comment les troisième et quatrième se déduisent de la seconde.

Les pressions ci à côté se mesurant par les poids de prismes de fluide dont les bases sont $da\,dh$, $dh\,dk$, $da\,dg$, et dont les hauteurs sont les quantités qui multiplient ces rectangles, les signes + et — ont lieu respectivement, suivant que la surface pressée s'avance sur les molécules fluides qui sont en contact avec elle, ou tend à s'éloigner de ces molécules.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$U =$ la vîtesse du fluide, et $u \pm U$ est la vîtesse relative de l'élément ω et du fluide. $h =$ la hauteur de la surface supérieure du fluide au-dessus de l'élément de surface ω. $g =$ la force accélératrice de la pesanteur. $da =$ la base horizontale de l'élément ω qui est supposé avoir la forme d'un parallélogramme rectangle. $f =$ l'angle formé par le parallélogramme ω et par le plan horizontal. $dh =$ la projection du côté incliné du parallélogramme ω sur un plan vertical passant par le côté horizontal da. $dg =$ la projection du même côté incliné sur un plan horizontal. $v =$ la vîtesse de l'élément de surface ω dans la direction de son mouvement. $\lambda =$ l'angle que la direction du mouvement du parallélogramme ω fait avec le plan de ce parallélogramme,			296. La direction du mouvement du corps faisant un angle quelconque avec le plan d'un élément de sa surface, trouver, 1.° La pression normale de l'élément de surface; 2.° La pression dans une direction qui fait un angle quelconque avec le plan de l'élément de surface;

457. Si l'on fait passer un plan vertical par la direction dans laquelle on vient de considérer la pression, qui fait un angle ε avec l'élément de la surface pressée, on aura pour les pressions horizontale et verticale dans ce plan (en faisant respectivement $\theta_{,} = 0$ et $\theta_{,} = \frac{1}{2}\pi$ dans les troisième et quatrième équations de l'art. précédent), les valeurs suivantes :

Pressions dans un plan vertical qui fait un angle quelconque avec la base horizontale de l'élément de surface..........

horizontale... $dhdk\,(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin. \lambda}{\sqrt{(2g)}})^2$

verticale..... $dadg\,(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin. \lambda}{\sqrt{(2g)}})^2$.

Les aires $dhdk$ et $dadg$ sont respectivement celles des projections de l'élément de surface sur un plan vertical perpendiculaire au plan vertical dans lequel on considère la pression, et sur un plan horizontal.

458. Enfin, la pression qui a lieu dans la direction même du mouvement, se calcule en faisant dans l'une des trois dernières équations de l'article 456, $\varepsilon = \lambda$ ou $\sin. f \cos. n_{,} \cos. \theta_{,} + \cos. f \sin. \theta_{,} = \sin. \lambda$; ce qui donne pour la pression dont il s'agit,

Pression dans la direction du mouvement de l'élément de surface.

.... $\frac{dadh \sin. \lambda}{\sin. f}\,(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin. \lambda}{\sqrt{(2g)}})^2$.

Observez qu'on a $\sin. \lambda = \ldots$ $\sin. f \cos. n \cos. \theta + \cos. f \sin. \theta$.

459. Lorsque le mouvement est horizontal ou vertical, on trouve la pression dans la direction de ce mouvement, en faisant respectivement $\theta = 0$, et $\theta = \frac{1}{2}\pi$ dans les équations de l'art. 457.

Pressions dans la direction du mouvement, lorsque ce mouvement est................

horizontal.... $dhdk\,(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \sin. f \cos. n}{\sqrt{(2g)}})^2$

vertical...... $dadg\,(h^{\frac{1}{2}} \pm \frac{v \cos. f}{\sqrt{(2g)}})^2$.

Les aires $dhdk$ et $dadg$ sont respectivement celles des projections de l'élément de surface sur un plan vertical perpendiculaire au plan vertical dans lequel se trouve la direction du mouvement, et sur un plan horizontal.

460. Si l'on cherche par l'une quelconque des formules précédentes, à quelle distance de la surface supérieure des fluides la pression est nulle, on trouvera

$$h = \frac{v^2 \sin.^2 \lambda}{2g};$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
direction qui fait un angle θ avec le plan horizontal, et dont la projection sur le plan horizontal passant par da, fait un angle $\varkappa$ avec la ligne droite perpendiculaire à da dans le même plan.			
ε = l'angle formé par le plan du parallélogramme ω, et par la direction dans laquelle on considère la pression; direction qui fait un angle θ, avec le plan horizontal, et dont la projection sur le plan horizontal passant par da, fait un angle $\varkappa$, avec la ligne droite perpendiculaire à da dans le même plan.			3.° Les pressions, horizontale et verticale, dans un plan vertical faisant un angle donné avec la base de l'élément de surface;
dk = la projection de da sur un plan vertical perpendiculaire au plan vertical qui contient la ligne de direction dans laquelle on considère la pression.			4.° La pression dans la direction de l'élément de surface;
			5.° Les composantes, horizontale et verticale, de la pression dans un plan vertical passant par la direction du mouvement.
			297. Trouver les élévations et les abaissemens du fluide, autour du corps, produits par la dénivellation.

formule qui, employée convenablement, fait connaître de combien le fluide s'élève à l'avant et s'abaisse à l'arrière du corps, en décrivant sur sa surface la courbe inclinée à l'horizon, dont j'ai parlé art. 454, qui constitue la *dénivellation.*

461. En appliquant les règles du calcul intégral aux valeurs des pressions élémentaires données précédemment, on obtiendra les pressions qui s'exercent sur une étendue finie de la surface d'un corps. Je me bornerai à un exemple simple.

Soit un plan vertical dont la partie immergée a la forme d'un parallélogramme rectangle à base horizontale; ce parallélogramme est supposé se mouvoir de manière que sa base, qui est toujours dans le même plan horizontal, fait un angle constant λ avec la direction du mouvement. Si l'on évalue la pression depuis $h = \pm \frac{v^2 \sin^2 \lambda}{2g}$ jusqu'à $h = H$ (on suppose que le parallélogramme s'élève au-dessus de la surface du fluide à une hauteur plus grande que $\frac{v^2 \sin.^2 \lambda}{2g}$), c'est-à-dire, depuis le point supérieur où la pression est nulle jusqu'à la base du parallélogramme, et qu'on détermine la constante en conséquence, on aura pour la valeur de cette pression totale dans une direction horizontale quelconque,

$$K\left(\tfrac{1}{2} H^2 \pm \tfrac{4}{3} H^{\frac{3}{2}} \frac{v \sin. \lambda}{\sqrt{(2g)}} + \frac{H v^2 \sin.^2 \lambda}{2g} \pm \frac{v^4 \sin.^4 \lambda}{6 \cdot 4 g^2}\right);$$

le terme $\pm K \frac{v^4 \sin.^4 \lambda}{6 \cdot 4 g^2}$ est introduit par la détermination de la constante relative à la dénivellation, et les signes $+$ et $-$ s'appliquent respectivement aux faces antérieure et postérieure du plan.

Si on retranche la pression à la face postérieure, de celle à la face antérieure, on aura pour la résultante des deux pressions,

$$\frac{8 K H^{\frac{3}{2}}}{3} \cdot \frac{v \sin. \lambda}{\sqrt{(2g)}} + \frac{k v^4 \sin.^4 \lambda}{3 \cdot 4 g^2},$$

ou

$$\tfrac{1}{3} K v \sin. \lambda \left(\frac{8 H^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2g)}} + \frac{v^3 \sin.^3 \lambda}{4 g^2}\right).$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			298. Trouver la pression qui a lieu sur une étendue finie de la surface d'un corps qui se meut dans un fluide.
			299. Appliquer la solution du problème précédent, à un plan vertical dont la partie immergée a la forme d'un parallélogramme rectangle à base horizontale.
H = la hauteur de la surface supérieure horizontale du fluide au-dessus de la base du parallélogramme. K' = la projection de cette base sur une ligne horizontale perpendiculaire à la direction dans laquelle on considère la pression.			300. Trouver, pour le parallélogramme dont il est question dans le problème précédent, la résultante de la pression, ou la différence entre les pressions aux faces antérieure et postérieure.

462. Il est inutile de s'étendre davantage sur une théorie dont on ne doit user, dans la pratique, qu'avec la plus grande circonspection. Je passe aux considérations qui donnent une formule très-connue pour l'évaluation du choc des fluides, qui est la base de la théorie ordinaire.

Qu'un corps Q dont l'aire de la face antérieure, supposée plane, est égale à Ω, se meuve dans un fluide en repos avec une vîtesse v, en suivant une direction qui fasse un angle λ avec le plan Ω; la vîtesse de ce corps dans le sens perpendiculaire à Ω, sera v sin. λ : il déplacera, pendant l'instant dt, un prisme fluide qui aura pour hauteur $v\,dt$. sin. λ, pour base Ω, et dont la masse sera $\Omega v dt$ sin. λ (la densité $=$ 1). Supposons que ce prisme fluide peut être assimilé à un corps parfaitement dur, de même masse, rencontré et choqué par le corps Q, supposé aussi parfaitement dur; la masse $\Omega v dt$ sin. λ acquerra la vîtesse v sin. λ, et la quantité de mouvement $\Omega v^2 dt$ sin.^{2} λ, qu'elle fera par conséquent perdre au corps Q. Supposons encore que le prisme fluide choqué s'anéantisse après le choc, et qu'un autre prisme fluide lui succède pour produire le même effet, l'expression $\Omega v^2 dt$ sin.^{2} λ, dans laquelle v est supposé variable, sera la valeur de la diminution instantanée de la quantité de mouvement du corps Q, produite par la pression du fluide; et la force retardatrice sera

$$\frac{\Omega\, v^2 \text{ sin.}^2 \lambda}{Q} \quad \text{ou} \quad \frac{2\, g\, a\, \Omega \text{ sin.}^2 \lambda}{Q}.$$

463. On emploîrait un raisonnement semblable, si le fluide en mouvement agissait sur le corps : dans ce cas, la force accélératrice serait

$$\frac{\Omega (V-u)^2 \text{ sin.}^2 \lambda}{Q} \quad \text{ou} \quad \frac{2\, g\, A\, \Omega \text{ sin.}^2 \lambda}{Q}.$$

464. L'angle λ se nomme angle d'*incidence*, et le choc se nomme *perpendiculaire* ou *oblique*, suivant que λ est ou n'est pas un angle droit.

465. La force motrice ou la résistance est donc égale à $2ga\Omega$ sin.^{2} λ et $2gA\Omega$ sin.^{2} λ, qui, dans le cas du choc perpendiculaire, deviennent $2ga\Omega$ et $2gA\Omega$, c'est-à-dire, égales au double du poids d'un prisme

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
Q = la masse du corps qui se meut dans le fluide. Ω est l'aire supposée plane qui forme la face antérieure du corps. v = la vîtesse du corps. λ = angle de la direction du mouvement et du plan Ω. Densité du fluide = 1.			301. Trouver l'expression de la force retardatrice qui fait varier la vîtesse d'un corps mu dans un fluide, en supposant que chaque lame de fluide, déplacée, s'anéantit, après avoir fait perdre au corps une partie infiniment petite de sa quantité de mouvement.
		191. Dans l'hypothèse du problème 301, la force retardatrice est en raison composée de la surface choquée, et du carré de la vîtesse relative du corps et du fluide.	
g = la force accélératrice de la pesanteur. a = la hauteur due à la vîtesse v.			
V = la vîtesse constante du fluide. u = la vîtesse variable du corps. A = la hauteur due à la vîtesse relative $V - u$.	70. De l'angle d'*incidence* et du choc *perpendiculaire* et *oblique* des fluides.		
		192. Dans la même hypothèse du problème 301, la force motrice où la	

du fluide qui aurait la surface choquée pour base, et pour hauteur celle due à la vîtesse relative du corps et du fluide.

466. D'APRÈS ce résultat sur les chocs perpendiculaires, les résistances seraient en raison composée de la surface choquée et du carré de la vîtesse relative; ce qui s'est trouvé passablement d'accord avec un grand nombre d'expériences faites avec soin, sur-tout lorsque les vîtesses ne sont pas considérables.

467. QUANT à la valeur absolue de la force motrice qui mesure le choc perpendiculaire, donnée art. 465, l'expérience a fait voir que cette valeur, à-peu-près exacte dans des canaux étroits, tels que les coursiers qui conduisent l'eau sur une roue, devait être réduite à moitié dans un fluide indéfini.

468. LES formules de l'art. 463 s'écartent considérablement de l'expérience, lorsqu'il s'agit des chocs obliques. Je vais donner pour ce cas une formule établie sur les expériences de *Bossut* (*Hydrodynamique, tome II, page 400*, édition de l'an IV), et qui en représente les résultats assez exactement, lorsque les angles d'incidence ne sont pas plus petits que le $\frac{1}{6}$ de la circonférence. Supposons que le corps flottant ait pour section constante parallèle à la surface de l'eau, un parallélogramme rectangle terminé par un triangle isocèle servant de proue, dont le côté du rectangle forme la base, et que la direction du mouvement est perpendiculaire à cette base.

Si, dans le cas où le fluide est en repos et où le corps se meut, on représente par 100 la résistance de cette même base, évaluée par le théorème 192, on aura, pour calculer la résistance de la proue triangulaire dans les cas où un des côtés égaux du triangle isocèle ne fera

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		résistance, pour les chocs perpendiculaires, est égale au double du poids d'un prisme du fluide qui aurait la surface choquée pour base, et pour hauteur celle due à la vîtesse relative du corps et du fluide.	
		193. La proposition énoncée au théorème 191 est, pour les chocs perpendiculaires, à peu de chose près, d'accord avec les résultats de l'expérience, sur-tout lorsque la vîtesse est peu considérable.	
x = l'angle formé par un des côtés égaux du triangle isocèle de la proue et par la base de ce triangle. $q = \frac{1}{60}$ de la circonférence = 0.10472, lorsque x est évaluée en parties de la circonférence qui a l'unité pour rayon.		194. La valeur absolue du choc ou de la résistance donnée, théorème 192, doit, pour les chocs perpendiculaires, être réduite à moitié dans le cas des fluides indéfinis, et donne un résultat à-peu-près exact lorsqu'il s'agit des fluides qui coulent dans des canaux étroits.	302. Trouver une formule, établie d'après l'expérience, qui donne la résistance qu'oppose un fluide en repos, à un corps flottant prismatique qui a pour section horizontale constante, un parallélogramme rectangle terminé par un triangle isocèle, servant de proue, dont le côté du parallélogramme forme la base; en supposant que la direction du mouvement est perpendiculaire à cette base, et que les deux côtés égaux du triangle isocèle ne font pas entre eux un angle plus petit que le $\frac{1}{3}$ de la circonférence.

pas avec la base un angle plus grand que $\frac{1}{12}$ de la circonférence,

$$100 \cos.^2 x + 0.0315 \left(\frac{x}{q}\right)^{3,25}.$$

Cette formule s'écarte de plus en plus des résultats observés à mesure que l'angle x augmente; et le meilleur parti à prendre pour évaluer la résistance des proues très-aiguës, est de se servir immédiatement des nombres donnés par l'expérience.

469. Je passe maintenant aux fluides élastiques, et je vais d'abord donner quelques formules pour la détermination de leur mouvement, lorsqu'ils s'écoulent par de petits orifices. Il s'agit ici principalement des fluides qui conservent l'état aériforme sous toutes les températures (ou du moins à des températures très-inférieures à celle de la glace). Les liquides vaporisés à qui le moindre refroidissement fait perdre l'état aériforme, exigent des considérations particulières. *Voyez* les art. 249, 250, 256, 257, et mon Mémoire sur la dilatabilité des fluides élastiques, cité art. 249.

Soient deux vases dont les capacités respectives sont A et B, communiquant entre eux par un petit orifice ω, et n'ayant d'ailleurs aucune autre issue. Supposons qu'un même fluide élastique, renfermé dans ces deux vases, soit, dans l'un et dans l'autre, à des densités différentes : si l'orifice ω est bouché, le fluide sera en équilibre dans chaque vase; mais au moment où cet orifice s'ouvrira, il y aura mouvement et le fluide passera du vase où la densité est plus grande, dans celui où la densité est moindre.

Les choses données par l'état de la question, sont,

1.° La masse totale du fluide renfermé dans les deux vases, et l'élasticité ou force expansive de ce fluide correspondante à une densité connue;

2.° Les densités et les élasticités ou forces expansives initiales, dans chaque vase.

Le tout sous une température constante.

Les choses cherchées sont,

1.° La vîtesse initiale,

2.° Une équation entre les densités variables,

3.° Les rapports entre la vîtesse à l'orifice et ces densités,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			303. Un fluide élastique enfermé dans deux vases A et B, qui communiquent entre eux par un petit orifice, et n'ont d'ailleurs aucune autre issue, est à la même température dans chaque vase, mais n'y a pas la même densité. Le petit orifice étant ouvert à l'instant où l'on compte zéro de temps, et les densités dans chaque vase étant connues à cet instant, on demande, en supposant toujours la température constante,

4.° Les rapports entre le temps et ces densités,

5.° Les rapports entre le temps et la vîtesse à l'orifice.

470. La vîtesse initiale a pour valeur, en supposant que le vase A se vide dans le vase B,

$$V = \sqrt{\left(\frac{Q - R}{DQ} \cdot 2gF\right)};$$

et dans le cas contraire,

$$V = \sqrt{\left(\frac{R - Q}{DR} \cdot 2gF\right)}.$$

471. L'un quelconque des deux vases A et B étant supposé plein de fluide élastique, et l'autre entièrement vide, les deux valeurs de V, données dans l'article précédent, deviennent

$$V = \sqrt{\left(\frac{2gF}{D}\right)}.$$

Les densités Q et R, dans les vases, n'entrent plus dans cette équation : ainsi la vîtesse initiale d'un fluide élastique qui, sortant d'un vase où il n'a d'issue que par un petit orifice, s'échappe dans un espace vide, est (pour un même fluide et une même température) indépendante de la densité dans le vase, et se trouve donnée par le rapport entre une densité quelconque de ce fluide et la force expansive correspondante. Cette propriété se déduit naturellement de ce que la densité augmentant dans le même rapport que l'élasticité, la masse de la tranche qui s'échappe est proportionnelle à la force motrice; ce qui rend la force accélératrice ou la vîtesse constante.

472. L'espace vide dans lequel le fluide s'échappe étant supposé infini, la vîtesse initiale demeurera constante pendant toute la durée du mouvement.

473. Le vase A étant rempli d'air atmosphérique, d'une densité égale à celle qu'a ce fluide au niveau de la mer, et le vase B étant supposé vide, on aura, en prenant la densité de l'eau pour terme de comparaison, $D = \frac{1}{850}$: on a de plus $F = 10{,}39$ mètres et $g = 9{,}81$ mètres; ce qui donne $V = \sqrt{(2 \times 9{,}81 \times 10{,}39 \times 850)} = 416{,}33$ mètres par seconde, vîtesse initiale de l'écoulement.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
A et B, qui désignent les vases, sont aussi les valeurs de leurs capacités respectives. F est une valeur donnée de l'élasticité ou force expansive du fluide élastique contenu dans les vases, correspondante à une densité, pareillement connue, D. Q et R sont les valeurs initiales respectives des densités dans les vases A et B. $V =$ la vîtesse initiale ou correspondante aux densités Q et R. $g =$ la force accélératrice de la pesanteur terrestre.		195. Dans le cas du problème 303, si l'un des vases est vide, au commencement du mouvement la vîtesse initiale (pour un même fluide élastique et une même température) sera indépendante de la densité, et par conséquent du ressort, dans le vase plein, et se trouvera donnée par le rapport entre une densité quelconque de ce fluide et le ressort ou force expansive correspondante; d'où il suit que si le vase vide a une capacité infinie, la vîtesse initiale demeurera constante pendant toute la durée du mouvement. 196. Dans l'hypothèse du théorème précédent, si le vase plein contient de l'air atmosphérique dont la densité initiale soit celle qui a lieu au niveau de la mer, la vîtesse initiale sera de 416,33 mètres par seconde.	1.° La vîtesse initiale, soit qu'il y ait du fluide dans les deux vases, soit qu'il n'y en ait que dans l'un, et que l'autre (dont la capacité peut être finie ou infinie) soit vide, en appliquant ce dernier cas à l'air atmosphérique;

474. La relation entre les densités du fluide dans l'un et l'autre vase est donnée par l'équation

$$AQ + BR = Aq + Br: \text{ d'où } \left\{ \begin{aligned} q &= \frac{AQ + B(R - r)}{A} \\ r &= \frac{BR + A(Q - q)}{B}, \end{aligned} \right.$$

qui est donnée par la condition que la somme des masses fluides contenues dans les deux vases est constante.

475. Le rapport entre la vîtesse à l'orifice et les densités dans chaque vase, se déduit de l'équation

$$u = V\sqrt{\left(\frac{Q(q - r)}{q(Q - R)}\right)},$$

qui, combinée avec les valeurs de q et r (*article précédent*) donne les deux valeurs

$$u = V\sqrt{\left(\frac{Q[A(Q - r) + B(R - r)]}{(Q - R)[AQ + B(R - r)]}\right)},$$

$$u = V\sqrt{\left(\frac{Q[B(q - R) - A(Q - q)]}{(Q - R)Bq}\right)},$$

au moyen desquelles la vîtesse u est donnée par une seule des densités q et r.

476. Le vase A étant supposé plein d'air atmosphérique, et se vidant dans l'atmosphère dont D et F expriment la densité et le ressort au niveau de la mer, on a $R = D = \frac{1}{850}$ (la densité de l'eau est prise pour unité), $F = 10{,}39$; $B = \infty$, et, art. 470, $V = \sqrt{\left(\frac{Q - R}{DQ} 2gF\right)}$; ce qui change la troisième équation de l'article précédent, en

$$u = \sqrt{\left(2gF.\frac{q - D}{qD}\right)} = 416{,}33 \times \sqrt{\left(\frac{850.q - 1}{850.q}\right)}.$$

Le mètre est l'unité linéaire.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
g et r sont les valeurs respectives des densités dans les vases A et B qui ont lieu au même instant.			2.° La relation entre les densités du fluide qui ont lieu en même temps dans l'un et l'autre vase;
u = la vîtesse à l'orifice qui a lieu en même temps que les densités correspondantes q et r.			3.° Le rapport entre la vîtesse à l'orifice et les densités correspondantes dans chaque vase, en appliquant le résultat de cette recherche au cas où le vase dans lequel l'écoulement se fait, a une capacité ou infinie ou finie;
		197. Lorsqu'un vase plein d'air atmosphérique condensé se vide dans l'atmosphère par un petit orifice, la vîtesse de l'écoulement, à un instant donné du mouvement, est à la vîtesse qui aurait lieu si l'écoulement se faisait dans le vide, comme $(850.q-1)^{\frac{1}{2}} : (850.q)^{\frac{1}{2}}$, q étant la densité de l'air dans le vase à l'instant dont il s'agit, et la densité de l'eau étant prise pour unité.	

477. Si l'on suppose au contraire que c'est l'atmosphère qui afflue dans le vase B, plein d'air atmosphérique raréfié, on a $Q = D = \frac{1}{850}$, $F = 10,39$ et $A = \infty$; ce qui donne $V = \sqrt{\left(\frac{D - R}{D^2}\right)}$ et $u = \sqrt{\left(\frac{2gF.}{D} \cdot \frac{D - r}{D}\right)} = 416,33 \times \sqrt{(1 - 850.r)}$.

478. Le vase B étant supposé avoir une capacité infinie et vide, les deux équations de l'art. 475 donnent $u = V$; ce qui est le résultat donné art. 471.

479. La relation entre les densités dans l'un et l'autre vase, et le temps, se déduit de l'une ou l'autre des équations

$$dt = \frac{AB}{\omega\sqrt{(2gH)}} \cdot \frac{dr\sqrt{[f(Q - R) - rm)]}}{(f - Br)\sqrt{(Qf - kr)}}$$

$$dt = \frac{-A\sqrt{(m)}}{\omega\sqrt{(2gHk)}} \cdot \frac{dq}{\sqrt{\left(q^2 - \frac{Qf}{k}q\right)}}.$$

L'intégrale de la seconde, complétée par la condition qu'on a en même temps $t = 0$ et $q = Q$, est

$$t = \frac{A\sqrt{(m)}}{\omega\sqrt{(2gHk)}} \cdot \log.\left\{\frac{Q\left[1 - \frac{f}{2k} + \sqrt{\left(1 - \frac{f}{k}\right)}\right]}{q - \frac{Qf}{2k} + \sqrt{\left(q^2 - \frac{Qf}{k}q\right)}}\right\},$$

et donne le temps en valeur de q. Lorsque r sera donné seul, on en déduira q, au moyen de l'équation $q = \frac{AQ + B(R - r)}{A}$, art. 474.

480. Le vase A étant plein d'air atmosphérique condensé, et l'écoulement se faisant dans l'atmosphère, on aura

$$B = \infty,\ r = R = D = \tfrac{1}{850},\ f = BD,\ k = BQ,$$

$m = B(Q - D)$ et la valeur de t deviendra

$$t = \frac{A\sqrt{(Q - D)}}{\omega\sqrt{(2gHQ)}} \cdot \log.\left\{\frac{Q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(Q^2 - DQ)}}{q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(q^2 - Dq)}}\right\},$$

481. En supposant toujours le vase A plein d'air atmosphérique à la densité Q; si l'écoulement se fait dans un espace infini et vide,

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$f = AQ + BR$ $k = (A + B)Q$ $m = (Q - R)B$ $V = \sqrt{(2gH)}$; d'où $H = \frac{V^2}{2g}$. t = le temps au bout duquel la vîtesse u et les densités q et r ont lieu.		198. Si c'est, au contraire, l'air atmosphérique qui afflue dans un vase rempli d'air raréfié, il y entre, à un instant donné, avec une vîtesse qui est à celle avec laquelle il entrerait dans un espace vide, comme $(1 - 850 . r) : 1$, r étant la densité dans le vase à l'instant dont il s'agit. En général, quel que soit le fluide élastique, le rapport énoncé au théorème précédent sera $(Q - D)^{\frac{1}{2}} : q^{\frac{1}{2}}$, et celui énoncé dans le présent théorème $(D - r)^{\frac{1}{2}} : D^{\frac{1}{2}}$ (*Voyez* art. 470, la signification de D).	4.° La relation entre les densités dans l'un et l'autre vase, et le temps, en appliquant le résultat, 1.° au cas où l'un des vases étant plein d'air atmosphérique, l'écoulement se fait soit dans l'atmosphère, soit dans un espace vide infini; 2.° au cas où l'atmosphère afflue dans un vase plein d'air raréfié, cas qui comprend celui où le vase serait vide au commencement du mouvement;

on a $B = \infty$ et $r = R = 0$; ce qui change l'équation de l'art. 479 en

$$t = \frac{A}{\omega\sqrt{(2gH)}} \log. \frac{Q}{q}.$$

482. Enfin, si l'on suppose que l'atmosphère afflue dans le vase B rempli d'air atmosphérique raréfié, on aura

$$t = \frac{2B\sqrt{(D - R)}}{\omega D\sqrt{(2gH)}} [(D - R)^{\frac{1}{2}} - (D - r)^{\frac{1}{2}}].$$

483. La constante arbitraire a été déterminée par la condition que lorsque $t = 0$, $r = R$: si le vase est vide au commencement du mouvement, on aura $R = 0$, et la valeur de t sera

$$t = \frac{2B\sqrt{(D)}}{\omega D\sqrt{(2gH)}} [D^{\frac{1}{2}} - (D - r)^{\frac{1}{2}}].$$

484. Pour avoir la relation entre la vîtesse u et le temps t, on peut, dans la troisième équation de l'article 475 qui donne la valeur de u en q, substituer la valeur de q en t, déduite de l'équation de l'article 479, valeur qui ne peut être obtenue que sous une forme transcendante.

485. L'emploi des fluides élastiques, comme moteurs, est très-fréquent dans la mécanique pratique. Je vais en conséquence placer ici quelques formules sur le mouvement d'un corps soumis à l'action d'un fluide élastique, qui pourront avoir des applications utiles. Ces formules peuvent se déduire, comme conséquences, de la solution du problème suivant.

Un fluide élastique est enfermé dans un vase cylindrique, dont on supposera d'abord l'axe vertical, et dans lequel est un piston qui peut monter et descendre ; un fluide élastique renfermé dans ce vase n'en peut sortir par aucune issue, et son élasticité ou force expansive n'est pas la même au-dessus et au-dessous du piston.

Au commencement du mouvement, lorsqu'on compte zéro temps, la vîtesse est naissante, et la force expansive au-dessous du piston est supposée assez prépondérante pour surmonter le ressort du fluide supérieur, le poids du piston et la résistance de l'équipage que ce piston doit faire mouvoir ; résistance qu'on peut assimiler au poids M d'une masse qui

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			5.° Enfin, la relation entre la vîtesse et le temps.
			304. Un fluide élastique est enfermé dans un vase cylindrique dont l'axe est vertical, et dans lequel est un piston qui peut monter et descendre; ce fluide ne peut sortir du vase par aucune issue, et son élasticité ou force expansive n'est pas la même au-dessus et au-

s'ajouterait à celle du piston. Cependant, pour plus de généralité, nous supposerons que M peut ou s'opposer à l'effort du fluide, ou conspirer avec lui; et pour cela nous écrirons, dans l'expression de la force motrice, $\pm M$ au lieu de M. Nous supposerons de plus que le piston exerce, contre la paroi intérieure du vase, un frottement constant.

Il s'agit de déterminer les circonstances du mouvement, ou d'avoir,

1.° La relation entre la vîtesse du piston et l'espace parcouru;

2.° La relation entre le temps et l'espace parcouru;

3.° La relation entre le temps et la vîtesse.

Et une de ces trois choses est toujours donnée, lorsque les deux autres sont connues.

486. Lorsqu'à partir de la position initiale (celle où on a $t = 0$ et $u = 0$) le corps se sera élevé à la hauteur x, la force motrice aura pour valeur

$$\frac{a}{a+x}\Pi - \frac{a_{,}}{a_{,}-x}\Pi_{,} + p_{,},$$

et l'équation différentielle du mouvement sera

$$\frac{p}{g}\, u\, du = \left(\frac{a}{a+x}\Pi - \frac{a_{,}}{a_{,}-x}\Pi_{,} + p_{,}\right) dx,$$

qui, intégrée et complétée par la condition qu'on a en même temps $t = 0$ et $x = 0$, donne

$$u = \pm \sqrt{\left\{\frac{2g}{p}\left[a\Pi \log.\left(\frac{a+x}{a}\right) + a_{,}\Pi_{,} \log.\left(\frac{a_{,}-x}{a_{,}}\right) + p_{,}x\right]\right\}}.$$

487. Si le vase cylindrique renferme de l'air atmosphérique, la pression F et la densité D pourront être celles qui ont lieu au niveau de la mer; ce qui (en prenant la densité de l'eau pour unité) donne $F = 10,39$ $D = \frac{1}{850}$, $\Pi = 850 \times 10,39.Q$. Supposant de plus que $a_{,} = \infty$, ce qui répond au cas où le cylindre serait ouvert par le haut et le piston chargé du poids de l'atmosphère, on aura $a_{,} \log.\left(\frac{a' - x}{a_{,}}\right) = -x$; (*),

(*) On peut démontrer ce résultat par la série connue,

$$a_{,} \log.\left(\frac{a_{,}-x}{a_{,}}\right) = a_{,} \log.\left(1 - \frac{x}{a_{,}}\right) = -a_{,}\left(\frac{x}{a_{,}} + \frac{x^2}{2a_{,}^2} + \frac{x^3}{3a_{,}^3} + \&c.\right)$$

$= -\left(x + \frac{x^2}{2a_{,}} + \&c.\right)$; expression qui devient $= -x$, lorsque $a_{,} = \infty$.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
F est une force expansive donnée, correspondante à une densité D pareillement donnée, du fluide élastique renfermé dans le vase. Q et R sont respectivement les densités au-dessous et au-dessus du piston, rapportées à la même température que F et D. P = le poids du piston $\pm M$ = le poids de la masse qui, ou est élevée par le piston, ou aide à son élévation, en se mouvant toujours avec la même vîtesse que lui. f = un poids constant équivalant au frottement du piston contre la paroi intérieure du cylindre. a et $a_{,}$ sont respectivement les distances des bases inférieure et supérieure du piston, aux bases inférieure et supérieure du cylindre ; distances comptées de la position initiale, celle où on compte zéro temps et zéro vîtesse. x = l'espace parcouru par le piston au bout du temps t. u = la vîtesse du piston au bout du temps t. g = la force accélératrice de la pesanteur terrestre.			dessous du piston : le mouvement de ce piston correspond à celui d'un poids M ; l'un et l'autre ont la même vîtesse, et M peut être additif au poids du piston ou soustractif de ce poids ; de plus, le piston exerce contre la paroi intérieure du vase un frottement constant. Il s'agit de déterminer les circonstances du mouvement, et de trouver, 1.° L'expression de la force motrice; 2.° La relation entre la vitesse et l'espace parcouru au bout d'un temps quelconque. 305. Appliquer la solution précédente, 1.° Au cas où le piston est poussé par l'air atmosphérique condensé, et où le cylindre est ouvert à sa partie supérieure, le piston étant, ou non, employé à surmonter une résistance M;

$R = D$, $\Pi_{,} = F$, et la valeur de u deviendra

$$u = \pm \sqrt{\left\{ \frac{2g}{p} \left[a \Pi \log. \left(\frac{a + x}{a} \right) + (p_{,} - F) x \right] \right\}}.$$

488. En conservant l'hypothèse du cylindre ouvert par le haut, si le fluide élastique n'a que le piston à faire mouvoir, c'est-à-dire, si $M = 0$, on aura pour la valeur de u,

$$u = \pm \sqrt{\left\{ \frac{2g}{p} \left[a \Pi \log. \left(\frac{a + x}{a} \right) - (F + P + f) x \right] \right\}}.$$

489. Le haut du cylindre étant supposé vide, on a $R = 0$; d'où $\Pi_{,} = 0$, et l'équation de l'article 447 devient

$$u = \pm \sqrt{\left\{ \frac{2g}{p} \left[a \Pi \log. \left(\frac{a + x}{a} \right) + p_{,} x \right] \right\}}.$$

490. Nous avons supposé dans les articles précédens, que le cylindre était vertical; mais les formules données dans ces articles, s'appliquent aisément au cas où ce cylindre serait horizontal : il suffit d'omettre M et P dans l'expression de la force motrice, et de faire $p' = -f$, la vîtesse sera

$$u = \pm \sqrt{\left\{ \frac{2g}{p} \left[a \Pi \log. \left(\frac{a + x}{a} \right) + a_{,} \Pi_{,} \log. \left(\frac{a_{,} + x}{a_{,}} \right) - fx \right] \right\}};$$

et si, en conservant toujours la même hypothèse, le cylindre est ouvert du côté de $a_{,}$, ou si l'on a $a_{,} = \infty$, ce cas donne $R = D$, $\Pi_{,} = F$ et $a_{,} \log. \left(\frac{a_{,} - x}{a_{,}} \right) = -x$; d'où

$$u = \pm \sqrt{\left\{ \frac{2g}{p} \left[a \Pi \log. \left(\frac{a + x}{a} \right) - (F + f) x \right] \right\}}.$$

Ces formules et celles des articles précédens peuvent s'appliquer à la théorie des bouches à feu.

491. Pour trouver la relation entre l'espace parcouru et le temps, mettez dans la formule du cas général, art. 486, au lieu de u sa valeur $\frac{dx}{dt}$; et vous aurez

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\left\{ \frac{2g}{p} \left[a \Pi \log. \left(\frac{a + x}{a} \right) + a_{,} \Pi_{,} \log. \left(\frac{a_{,} - x}{a_{,}} \right) + p_{,} x \right\} \right.}}.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$\frac{QF}{D} = \Pi$ $\frac{RF}{D} = \Pi_{,}$ $P + M = p$ $\pm M - P - f = p_{,}$.			
			2.° Au cas où la partie supérieure du cylindre est un espace vide;
			3.° Au cas où l'axe du cylindre est horizontal et fermé à ses deux extrémités;
			4.° Au même cas, en supposant que le cylindre est ouvert à une de ses extrémités.
			306. Trouver, dans l'hypothèse du problème 304, 1.° La relation entre l'espace parcouru et le temps;

492. QUANT à la relation entre le temps et la vîtesse, elle est donnée lorsqu'on a deux équations, l'une entre u et x, l'autre entre t et x : ainsi, l'équation précédente étant supposée intégrée, on aura la relation entre u et t en éliminant x entre cette équation et celle de l'art. 486.

493. LA force motrice $\frac{a}{a+x}\Pi - \frac{a_{,}}{a_{,}-x}\Pi_{,} + p_{,}$ étant égalée à zéro, on aura

$$x^2 + Ax - B = 0,$$

d'où

$$x = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 + B)}.$$

Les deux valeurs de x donnent les positions où le piston ne se meut qu'en vertu de sa vîtesse acquise. Si l'on fait abstraction de la masse M et du frottement f, ce seront les positions où le cylindre étant supposé horizontal, le piston sera également pressé par chacune des deux masses fluides de différentes densités, qui agissent sur lui dans des directions opposées ; et si le cylindre est vertical, l'équilibre aura lieu entre l'effort de la masse fluide qui s'oppose au mouvement, et celui de la masse fluide qui favorise le mouvement, plus ou moins le poids du piston, selon qu'il descendra ou montera.

494. DANS cette même hypothèse où le piston est la seule masse à mouvoir et où l'on fait abstraction du frottement, le piston, à partir du point donné par l'équation précédente, doit s'avancer jusqu'à ce que sa vîtesse acquise à ce point soit éteinte, c'est-à-dire, jusqu'à un point donné par une valeur de x, qu'on peut supposer $= b$, et qu'on déduirait de l'équation

$$(A)\ldots\ a\Pi \log.\left(\frac{a+x}{a}\right) + a_{,}\Pi_{,} \log.\left(\frac{a_{,}-x}{a_{,}}\right) - Px = 0,$$

point où sa vîtesse est nulle, et où sa force motrice se trouverait en mettant b au lieu de x dans l'expression $\frac{a}{a+x}\Pi - \frac{a_{,}}{a_{,}-x}\Pi_{,} - P$. Il doit ensuite rebrousser chemin, et accélérer sa vîtesse jusqu'au point déterminé par la racine positive de l'équation $x = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 + B)}$; cette vîtesse est ensuite retardée jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse à un point

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			2.° Celle entre le temps et la vîtesse.
$A = \frac{a\Pi + a_{,}\Pi_{,} + (a - a_{,})p_{,}}{p_{,}}$ $B = \frac{aa_{,}(\Pi - \Pi_{,} - p_{,})}{p_{,}}$.			307. En conservant l'hypothèse du problème 304, déterminer, 1.° Les points où la force motrice est nulle;
		199. Si, dans l'hypothèse du problème 304, on fait abstraction du frottement, le mouvement du piston sera alternatif; c'est-à-dire qu'après avoir parcouru un certain espace dans un sens, il recommencera une course en sens contraire, et ainsi de suite.	2.° Les points où la vîtesse est nulle, et où le piston recommence sa course en sens contraire.

donné par une autre racine b' de l'équation (A). Alors le corps parcourt de nouveau l'espace $b' + b$, et ainsi de suite, ayant toujours aux mêmes points des vîtesses égales en quantités, et différant seulement en directions dans deux courses consécutives.

Des oscillations pareilles auraient aussi lieu dans le cas où le poids P ferait monter et descendre un autre poids et où l'on ferait abstraction du frottement. Si le frottement a lieu, comme c'est un obstacle dont l'effet est le même, quelle que soit la direction du mouvement, et qui diminue sans cesse la force motrice sans emmagasiner, si je puis m'exprimer ainsi, ce qu'il lui enlève pour le restituer ensuite ; dans ce cas, les oscillations doivent être de plus en plus petites, jusqu'à ce qu'elles cessent entièrement.

495. L'ÉQUATION

$$x = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 + B)},$$

trouvée art. 493, et qui donne les deux points où la force motrice est nulle (c'est-à-dire où le fluide élastique a acquis des forces expansives égales de chaque côté du piston), indique par conséquent qu'à ces mêmes points la différentielle de la vîtesse est zéro ; ce qui d'ailleurs est évident, puisqu'ils séparent les espaces où la vîtesse va en croissant, de ceux où elle va en diminuant. Chacun de ces points correspond donc à un *maximum* de vîtesse ; désignons-les par α et β, et faisons abstraction du frottement. Le point α répondra au *maximum* de vîtesse lorsque le mouvement aura lieu de β en α ; et le point β répondra au *maximum* de vîtesse, lorsque le mouvement aura lieu de α en β ; ce qui arrivera après que le corps, parvenu à la limite de sa course de β en α, où sa vîtesse est nulle, aura rebroussé chemin. La valeur de la plus grande vîtesse se trouve, en substituant celle de x ci-dessus, dans l'équation de l'article 486.

Si le cylindre était ouvert d'un côté, et que le piston fût un projectile destiné à être lancé dans l'air, la valeur de x, donnée précédemment, serait la longueur à donner au cylindre à partir du point de départ, pour que la vîtesse à la sortie de ce cylindre fût la plus grande possible. Sous ce point, la théorie que je viens d'exposer peut être de quelque utilité pour fixer les dimensions des bouches à feu : je ne conseille cependant

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
		200. En conservant l'hypothèse du problème 304, il y a dans chaque course un point où la vîtesse est un *maximum*, qui est celui où les efforts que le fluide élastique exerce sur chaque base du piston, sont égaux.	308. Trouver dans l'hypothèse du problème 304, le point de chaque course du piston où la vîtesse est un *maximum*, et la valeur de cette plus grande vîtesse.

pas de l'employer sans modifications, parce qu'il y a plusieurs circonstances physiques à combiner avec les principes sur lesquels cette théorie est fondée, qui ne sont pas de nature à être placées ici.

496. Après avoir examiné les circonstances du mouvement d'un corps qui éprouve l'action d'un fluide élastique renfermé dans un espace limité, où une même masse de ce fluide occupe différens volumes, considérons le cas où un corps pesant se meut dans un fluide élastique d'une étendue indéfinie.

Ce problème, qui embrasse la théorie des projectiles dans les milieux résistans, a été traité par *Newton*, et après lui, par plusieurs autres géomètres célèbres. *Lagrange* en a donné les équations fondamentales dans sa théorie des *fonctions analytiques*, où il a en même temps fait voir la véritable cause d'une erreur qui s'était glissée dans la première solution de *Newton*.

Soit donc un corps pesant et homogène, animé d'une vîtesse initiale, dans une direction qui fait un angle donné avec l'horizon (vîtesse imprimée de manière que le corps n'a aucun mouvement de rotation autour de son centre d'inertie), et lancé dans un milieu résistant suivant une loi quelconque; ne présupposant d'abord rien sur la forme de la courbe décrite, les équations différentielles du mouvement seront

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -r\cos.\alpha \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -g - r\cos.\beta \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -r\cos.\gamma \end{aligned}\right\}$$

Observez que r est ici une quantité linéaire, puisqu'elle résulte de la division d'une quantité comparable à un poids par une masse.

497. La première et la troisième équation donnent

$$z = Ax + \text{constante}.$$

Ainsi la projection de la courbe sur le plan horizontal des xz est une ligne droite : le corps se meut dans un plan vertical et décrit une courbe plane : les équations

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -r\cos.\alpha,\quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g - r\cos.\beta.$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			309. Un projectile, qu'on peut supposer de forme sphérique, étant lancé avec une vitesse finie dans un milieu qui résiste suivant une loi quelconque, déterminer les circonstances de son mouvement, et trouver,
x et z sont deux coordonnées horizontales ; y est la coordonnée verticale. α, β et γ sont les angles formés par la direction du mouvement et par les axes des x, y et z respectivement. $r =$ le poids représentatif de la résistance du milieu à un instant quelconque divisé par la masse du mobile. $u =$ la vîtesse au bout du temps t. $q =$ la force accélératrice de la pesanteur.			1.° Les équations différentielles de ce mouvement;
		201. Un projectile lancé avec une vîtesse initiale dans un milieu résistant suivant une loi quelconque, y décrira une courbe plane.	

498. Ces équations conduisent aux suivantes :

$$\frac{r}{g} = -\frac{\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}}{2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\ *.$$

$$u = \sqrt{\left\{\frac{g\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{-\frac{d^2y}{dx^2}}\right\}},$$

au moyen desquelles, si l'on connaissait la courbe décrite, on en déduirait la résistance r du milieu **.

499. La résistance étant, pour une densité donnée, supposée proportionnelle au carré de la vîtesse, on a

$$r = mku^2 = \frac{kmg\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{-\frac{d^2y}{dx^2}},$$

---

* L'erreur de *Newton*, dont j'ai parlé art. 496, consiste en ce que la valeur de la résistance qui se déduit de sa solution, écrite avec la notation que j'emploie ici, aurait au dénominateur $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$, au lieu de $2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$.

** On parvient aisément à ces équations en éliminant le temps des équations différentielles de l'article précédent. *Lagrange* a employé cette méthode conjointement avec une autre, dans laquelle il s'est servi de formules analytiques que je vais rapporter, parce qu'on peut en tirer un parti utile pour la solution de plusieurs problèmes.

Soient les équations

$$x = f(t),\ y = ff(t),$$

qui ont lieu en même temps. Ces équations supposent entre x et y une relation $x = \varphi(y)$; et au moyen des fonctions dérivées de $f(t)$ et $ff(t)$, on a les fonctions dérivées de $\varphi(y)$ par les équations suivantes :

$$\varphi'(x) = \frac{ff'(t)}{f'(t)}$$

$$\varphi''(x) = \frac{ff''(t)}{[f'(t)]^2} - \frac{f''(t).ff'(t)}{[f'(t)]^3}$$

$$\varphi'''(x) = \frac{ff'''(t)}{[f'(t)]^3} - \frac{3f''(t).ff''(t)}{[f'(t)]^4} + \frac{3[f''(t)]^2.ff'(t)}{[f'(t)]^5} - \frac{f'''(t).ff'(t)}{[f'(t)]^4},$$

&c. &c.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			2.° Le rapport entre la résistance du milieu et la pesanteur, nécessaire pour que le corps parcoure une courbe donnée; 3.° L'expression générale de la vîtesse;

valeur qui, substituée dans la première équation de l'article précédent, donne

$$km = \frac{\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)}{2\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}},$$

qui servira à déterminer la densité k, nécessaire pour que le mobile parcoure une courbe donnée.

500. Il est aisé de déduire de l'équation précédente, la forme la plus simple sous laquelle on puisse mettre l'équation différentielle de la courbe, lorsque la résistance est proportionnelle au carré de la vîtesse, et que la densité est constante. Cette forme est la suivante :

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = A e^{\frac{s}{\lambda}};$$

λ est la hauteur due à la vîtesse avec laquelle la résistance au mouvement du corps serait égale au poids de ce corps ; c'est une quantité que l'expérience seule peut donner. Quant à la constante A, c'est la valeur initiale de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (lorsque $s = 0$, $e^{\frac{s}{\lambda}} = 1$ et $\frac{d^2 y}{dx^2} = A$). Or, on déduit des équations du mouvement,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-g\,dt^2}{d x^2},$$

$\frac{dt}{dx}$ est en général la vîtesse horizontale ; et au premier instant, sa valeur $= V \cos. \theta$. On a donc pour ce premier instant $\frac{d^2 y}{dx^2} = A = \frac{-g}{V^2 \cos.^2 \theta} = \frac{-1}{2h \cos.^2 \theta}$: ce qui change l'équation précédente en

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{e^{\frac{s}{\lambda}}}{2h \cos.^2 \theta}.$$

501. Les analystes se sont exercés à chercher des intégrales plus ou moins approchées de cette équation. La formule suivante pourra être

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
k = la densité constante ou variable. m = une constante donnée par l'expérience.			4.° La valeur de la densité nécessaire pour que le corps parcoure une courbe donnée, lorsque la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse;
$mk = \frac{1}{2\lambda}$; d'où $r = \frac{u^2}{2\lambda} = \frac{\mu g}{\lambda}$; ce qui, lorsque $\mu = \lambda$, donne $r = g$. e = le nombre dont le logarithme hyperbolique = 1.			5.° L'équation différentielle de la courbe, en conservant l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse.
θ = l'angle initial formé par la direction du mouvement et par le plan horizontal. h = la hauteur due à la vîtesse initiale.			
			310. Trouver une équation finie de la courbe décrite dans l'air par un

utile pour calculer les points de la courbe, lorsque la vîtesse initiale n'excédera pas 60 ou 70 mètres par seconde et que l'angle θ sera petit, cas auquel cos. θ différera peu de l'unité; on emploîra seulement les cinq premiers termes de la série qui compose le second membre,

$$y = x \text{ tang. } \theta - \frac{x^2}{4\, h \cos.^2 \theta} - \frac{x^3}{12\, \lambda\, h \cos.^3 \theta}$$
$$+ \frac{x^4}{24}\left(\frac{\sin. \theta}{4\, \lambda\, h^2 \cos.^4 \theta} - \frac{1}{2\, \lambda^2\, h \cos.^4 \theta}\right)$$
$$+ \frac{x^5}{120}\left(\frac{\sin. \theta}{\lambda^2\, h^2 \cos.^5 \theta} - \frac{1}{2\, \lambda^3\, h \cos.^5 \theta} - \frac{1}{8\, \lambda\, h^3 \cos.^3 \theta}\right),$$
$$+ \text{ \&c.}$$

502. Si l'on suppose la résistance nulle, on aura $\lambda = \infty$, et l'équation deviendra

$$y = x \text{ tang. } \theta - \frac{x^2}{4\, h \cos.^2 \theta}:$$

c'est la même donnée art. 114.

503. La vîtesse initiale des corps lancés par les bouches à feu, est quelquefois de 6 ou 700 mètres par seconde; et la formule de l'article 501 devient alors peu convergente et même divergente pour les valeurs de x un peu considérables. On a, dans ce cas, pris le parti de supposer à la densité une variation qui, propre à rendre l'équation différentielle traitable, fût cependant renfermée dans des limites peu étendues.

Ainsi, prenant la hauteur λ, donnée par l'expérience, pour l'unité ou le terme de comparaison de toutes les autres longueurs, et supposant

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1 + \varepsilon \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}};\ \varepsilon = \frac{\cos. \theta}{1 + \cos. \theta},$$

λ se trouvera effectivement égal à l'unité, 1.° au point de départ où $\frac{dy}{dx} = \text{tang. } \theta$; 2.° au point le plus élevé de la courbe où $\frac{dy}{dx} = 0$; 3.° au point de la branche descendante de la courbe où elle fait un angle θ avec l'horizon. La densité variera dans les autres points; mais sa plus petite valeur sera $= \sqrt{(1 - \text{tang.}^4 \tfrac{1}{2} \theta)}$; ce qui donne des

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			globe de métal, applicable aux vîtesses de 60 ou 70 mètres par seconde.
			311. Appliquer la solution du problème précédent, au cas où la résistance est nulle.
			312. Résoudre le problème 309, en prenant, pour représenter la résistance, une fonction qui varie dans des limites peu étendues, et trouver,

anomalies peu sensibles lorsque θ n'excède pas $\frac{1}{3}\pi$; étendue qui comprend des applications très-nombreuses.

Cela posé, on déterminera des quantités B et c par les équations

$$B = \frac{1}{2h\cos.^2\theta} + \text{tang.}\,\theta + \frac{\varepsilon}{3}\,\text{tang.}^3\,\theta,$$

$$\frac{\varepsilon}{3}c^3 + c - B = 0;$$

et on aura l'intégrale

$$(1 + \varepsilon c^2)\,x = \log.\left(\frac{c - p}{c - \text{tang.}\,\theta}\right) - \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{(p + \frac{1}{2}c)^2 + m^2}{(\text{tang.}\,\theta + \frac{1}{2}c)^2 + m^2}\right)$$
$$- \frac{\frac{3}{2}c}{m}\,\text{arc tang.}\left(\frac{p + \frac{1}{2}c}{m}\right) + \frac{\frac{3}{2}c}{m}\,\text{arc tang.}\left(\frac{\text{tang.}\,\theta + \frac{3}{2}c}{m}\right).$$

On calculera ainsi la valeur de x correspondante au point où la courbe fait un angle donné avec l'horizon, qui a p pour tangente; et cette valeur de x trouvée, on aura celle de y par l'équation

$$y - cx = \frac{3}{\varepsilon m}\,\text{arc tang.}\left(\frac{p + \frac{1}{2}c}{m}\right) - \frac{3}{\varepsilon m}\,\text{arc tang.}\left(\frac{\text{tang.}\,\theta + \frac{1}{2}c}{m}\right).$$

504. En faisant dans cette équation $\frac{dy}{dx} = p = 0$, on a, en quantités toutes connues, la plus grande élévation du mobile, et la distance horizontale de l'origine des x au point de plus grande élévation. Pour trouver ensuite à quelle distance du point de départ il se retrouve dans le plan horizontal passant par ce même point de départ, ou par l'origine des x, il faut chercher une valeur de p qui, substituée dans les équations de l'article précédent, donne $y = 0$; et c'est à quoi on ne parvient que par une espèce de tâtonnement. Les auteurs qui se sont occupés de cette matière, ont imaginé divers procédés pour abréger les opérations; ils font ordinairement des calculs séparés pour les branches ascendante et descendante de la courbe, au moyen de formules particulières * : mais ces détails ne peuvent pas trouver

---

* La branche ascendante se calcule avec une exactitude très-suffisante par les formules de l'article 503; et en y joignant les formules suivantes pour la branche descendante, on aura, dans tous les cas, autant de précision que la nature de la question en comporte.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$\pi =$ la demi-circonférence qui a le rayon pour unité.			
$m = \sqrt{\left(\frac{3}{4}c^2 + \frac{3}{\varepsilon}\right)}$ $p = \frac{dy}{dx}$.			1.° Une équation qui donne la relation entre l'abscisse horizontale et l'angle que fait la courbe avec l'horizon; 2.° Une équation qui donne la relation entre les deux coordonnées, horizontale et verticale, et l'angle que fait la courbe avec l'horizon; 3.° La plus grande élévation du mobile, et la distance horizontale de son point de départ à son point de plus grande élévation.

place ici. Il me suffit d'avoir présenté tous ceux qui peuvent donner une idée précise de la question et des méthodes employées pour la résoudre.

La hauteur due à la vîtesse au sommet étant désignée par h', et π la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, on a

$$h' = \frac{h \cos.^2 \theta}{1 + h \cos.^2 \theta \left[\frac{\sin \theta}{\cos.^2 \theta} + \log.\ \text{tang.} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\theta \right) \right]}.$$

Prenant donc le sommet pour origine de la trajectoire, on aura le cas des formules générales dans lequel $\theta = 0$, et la vîtesse initiale $= \sqrt{(2gh')}$; changeant les signes de $\frac{dy}{dx}$ et de y, afin que ces quantités soient positives, on conservera pour la détermination de la densité, l'hypothèse de

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1 + \varepsilon \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}},$$

qui donnera $\lambda = 1$ au point de départ et à un autre point correspondant à une valeur arbitraire de $\frac{dy}{dx}$. Il est assez convenable de prendre pour ce dernier point, celui où $\frac{dy}{dx} = 1$; ce qui donne $\frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{(2)}} = 1$ ou $\varepsilon = -1 + \sqrt{(2)} = 0{,}4142136$. Au reste, on peut faire varier sensiblement cette valeur de $\frac{dy}{dx}$, sans que les résultats en souffrent beaucoup.

Cela posé, après avoir trouvé la valeur de h' par la formule précédente, on calculera c m, ψ, A et P par les équations,

$$\frac{\varepsilon}{3} c^3 + c = \frac{1}{2h'}, \quad \frac{3}{4} c^2 + \frac{3}{\varepsilon} = m^2,$$

$$\text{tang.}\ \psi = \frac{\frac{3}{2} c}{m}, \quad \text{tang.}\ A = \frac{\frac{3}{2} c}{m}, \quad \text{tang.}\ P = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{3}{2} c}{m};$$

et on aura pour déterminer tous les points de la branche descendante, en plaçant l'origine des coordonnées au sommet,

$$(1 + c^2 \varepsilon)\, x = \log.\left[\frac{\sin.(\psi + P)}{\sin.(\psi - A)}\right] + \frac{\frac{3}{2} c}{m} (A + P)$$

$$y = -cx + \frac{3}{\varepsilon m}(A + P).$$

On observera que lorsque $x = 0$, on a $\frac{dy}{dx} = 0$, et par conséquent $A = -P$; ce qui donne $y = 0$, ainsi que cela doit être.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.

505. Je terminerai cette troisième partie par l'analyse de la théorie et le tableau des formules qui se rapportent au mouvement vibratoire de l'air et à la propagation du son. Cette matière, qui a exercé les plus grands géomètres, présente une foule de questions intéressantes, tant par les méthodes qu'on a employées pour les résoudre, que par les explications que leurs solutions ont données de plusieurs phénomènes importans de la physique du son.

Qu'on se rappelle les art. 403 et 404, où un fluide incompressible est supposé se mouvoir dans un tube d'amplitude constante; substituons de l'air à ce liquide, et que de plus la directrice de ce tube soit une courbe ayant tous ses points situés dans un plan horizontal.

Les formules (1) de l'art. 401 donneront, dans le cas dont il s'agit, en observant que, vu l'horizontalité du tube, les puissances sollicitantes sont nulles,

$$\left(\frac{d(k\upsilon)}{ds}\right) + \left(\frac{dk}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{g\,\delta p}{k} = -\,\upsilon\,\delta\upsilon - ds\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)$$

La température est supposée invariable, soit dans l'étendue du tube, soit dans les instans successifs du mouvement.

En substituant, dans la seconde équation, pour p sa valeur $\frac{a}{b}\,k$, et observant que δk, δp et $\delta\upsilon$ sont indépendantes du temps, et ne se rapportent qu'à l'état simultanée de deux molécules infiniment voisines, cette équation devient,

$$\frac{ga}{bk}\left(\frac{dk}{ds}\right) + \upsilon\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \frac{d\upsilon}{dt} = 0$$

qui, avec la première développée, $\upsilon\left(\frac{dk}{ds}\right) + k\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right) + \left(\frac{dk}{dt}\right) = 0$, conduit à l'équation unique,

$$\left(\upsilon\upsilon - \frac{ga}{b}\right)\left(\frac{d^2\upsilon}{ds^2}\right) - 2\upsilon\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)^2 + 2\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) + 2\upsilon\left(\frac{d^2\upsilon}{dt\,ds}\right) + \left(\frac{d^2\upsilon}{dt^2}\right) = 0.$$

506. On peut déduire l'équation du mouvement des formules (2) de l'art. 401, déduites de la considération de l'état initial du fluide. Ces dernières donnent, en observant que l'horizontalité du tube rend nulles

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
s = la longueur du tube depuis un point fixe de ce tube jusqu'à un point variable, où se trouve une molécule d'air au bout du temps t. u = la vîtesse de cette molécule au bout du temps t. k et p sont respectivement sa densité et sa pression au bout du même temps t. ω = l'amplitude constante du tube. b = une densité donnée correspondante à une pression donnée a. On a $p : k :: a : b$; d'où $p = \frac{a}{b} k$.			313. Trouver l'équation du mouvement de l'air dans un tube d'amplitude constante, dont la directrice a tous ses points dans un plan horizontal, en supposant que la température est invariable, soit dans l'étendue du tube, soit dans les différens instans du mouvement. 1.° En partant des formules (1) de l'art. 401; 2.° En partant des formules (2) de l'art. 401, déduites de la considération de l'état initial du fluide.

les puissances sollicitantes,

$$k\left(\frac{ds}{dS}\right) = K,$$

$$\frac{g\,\delta K}{k} = -\,\delta s\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right).$$

On a, 1.° les différentielles, par δ, indépendantes de t; 2.° k, p et s, fonctions de S et de t; 3.° K, fonction de S seule, et on parvient à l'équation finale,

$$\frac{g a \delta K}{b K \delta S}\left(\frac{ds}{dS}\right) - \frac{g a}{b}\left(\frac{d^2 s}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = 0,$$

qui, lorsque $t = 0$, doit donner $s = S$, $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$ et $k = K$, et dont l'intégrale doit renfermer deux fonctions arbitraires, au moyen desquelles tant le lieu que le mouvement d'une molécule quelconque se détermineront, pour un instant donné.

507. Les applications à faire de l'équation précédente, se rapportent particulièrement à un cas qui en rend l'intégration facile, celui où chaque molécule ne s'éloigne que très-peu de sa position initiale, quelle que soit la valeur du temps t.

Observant que dans ce cas $\left(\frac{d\psi}{dS}\right)$ est une très-petite quantité, on a l'équation

$$\frac{g a \delta K}{b K \delta S} - \frac{g a}{b}\left(\frac{d^2 \psi}{dS^2}\right) + \left(\frac{d^2 \psi}{dt^2}\right) = 0,$$

qui a pour intégrale complète,

$$\psi = \int\left[\delta S.\ \log.\left(\frac{K}{B}\right)\right] + \left\{f\left[S + t\sqrt{\left(\frac{a}{b}g\right)}\right] + ff\left[S - t\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)g}\right]\right\}\alpha.$$

Le multiplicateur α, étranger à l'intégration, n'étant introduit dans la valeur de ψ que d'après la supposition que ψ doit être une petite quantité.

508. Observant que $s = S + \psi$, cette équation donne les deux suivantes :

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \log.\left(\frac{K}{B}\right) + \left\{f'\left[S + t\sqrt{\left(\frac{a}{b}g\right)}\right] + ff'\left[S - t\sqrt{\left(\frac{a}{b}g\right)}\right]\right\}\alpha$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{a}{b}\,g\right)^{\frac{1}{2}} \times \left\{f'\left[S + t\sqrt{\left(\frac{a}{b}g\right)}\right] + ff'\left[S - t\sqrt{\left(\frac{a}{b}g\right)}\right]\right\}\alpha,$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
S = la distance d'un point fixe du tube à un autre point du même tube, où se trouve une molécule d'air, à l'instant où on compte zéro temps. s = la distance du même point fixe au point où se trouve la même molécule d'air au bout du temps t. K = la densité de cette molécule lorsqu'on compte zéro temps. k, p, ȣ, a et b ont la même signification qu'à l'article précédent.			
ψ = la distance où une molécule quelconque se trouve de sa position initiale au bout du temps t. B = la densité qui a lieu dans l'état d'équilibre. f et ff sont des signes de fonction arbitraire. α est une quantité très-petite et indéterminée. f' et ff' désignent les fonctions primes de f et ff, suivant la notation de *Lagrange*.			314. Introduire dans la solution précédente, la condition que chaque molécule est, à une époque quelconque, peu éloignée de sa position initiale.

dont la première fait connaître pour un temps quelconque la densité de la molécule placée à l'extrémité de s, densité $= \frac{K}{(\frac{ds}{dS})} = k$,

(k étant ainsi déterminé, on en déduit la pression $p = \frac{a}{b} k$), et dont la seconde donne la vîtesse de la même molécule $= \upsilon = (\frac{ds}{dt})$.

L'expression $\frac{K}{(\frac{ds}{dS})}$ peut, en observant que $(\frac{ds}{dS})$ diffère peu de l'unité, et supposant $(\frac{ds}{dS}) = 1 + \omega$, être considérée comme égale à $K(1 - \omega)$, les quantités ω^2, ω^3, &c. des ordres supérieurs pouvant être négligées; on a donc $k = K(1 - \omega)$, ou

$$k = 1 - \log.(\frac{Q}{B}) - \left\{f'[S + t\sqrt{(\frac{ag}{b})}] + ff'[S - t\sqrt{(\frac{ag}{b})}]\right\}\alpha.$$

509. Ainsi, tous les phénomènes du mouvement sont représentés par les équations,

$$(1)\ldots k = \left\|1 - \log.(\frac{K}{B}) - \left\{f'[S + t\sqrt{(\frac{ag}{b})}] + ff'[S - t\sqrt{(\frac{ag}{b})}]\right\}\alpha\right\| K$$

$$(2)\ldots p = \frac{a}{b} k = \left\|\frac{a}{b} - \frac{a}{b}\log.(\frac{K}{B}) - \frac{\alpha a}{b}\left\{f'[S + t\sqrt{(\frac{ag}{b})}] + ff'[S - t\sqrt{(\frac{ag}{b})}]\right\}\right\| K$$

$$(3)\ldots \upsilon = (\frac{ag}{b})^{\frac{1}{2}}\left\{f'[S + t\sqrt{(\frac{ag}{b})}] - ff'[S - t\sqrt{(\frac{ag}{b})}]\right\}\alpha$$

$$(4)\ldots \psi = \left\{f[S + t\sqrt{(\frac{ag}{b})}] + ff[S - t\sqrt{(\frac{ag}{b})}]\right\}\alpha + \int[\delta S \log.(\frac{K}{B})].$$

510. Voici comment on détermine k, p, υ et ψ pour une molécule quelconque. Dans l'état d'équilibre, la densité de cette molécule est égale à B, sa pression à $\frac{a}{b} B$, et son mouvement est zéro. Une cause quelconque trouble cet état d'équilibre; et il résulte de l'action de cette cause, la distance de la molécule à un point fixe du tube étant S au moment où cette action a lieu, 1.° que sa densité B devient K, et que sa pression $\frac{a}{b} B$ se change en $\frac{a}{b} K$; 2.° qu'elle acquiert une vîtesse U.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			315. Donner toutes les équations qui représentent les phénomènes du mouvement.
			316. Construire les équations qui représentent les phénomènes du mouvement, soit pour l'état initial, soit pour un instant quelconque.

Cette cause qui trouble l'équilibre, produit son effet lorsqu'on compte zéro temps. On a donc alors $\aleph = U$; et comme au bout du temps t, S devient $S + \psi$, à l'instant où la cause agit, $\psi = 0$. D'après cela, les quatre équations de l'article précédent, appliquées à l'état initial de l'air, celui qu'il prend à l'instant où son équilibre vient d'être troublé et où on compte $t = 0$, deviennent

$$(1)\ldots 0 = \log.\left(\frac{K}{B}\right) + [f'(S) + ff'(S)]\,\alpha$$

$$(2)\ldots P = \frac{a}{b}\left\{1 - \log.\left(\frac{K}{B}\right) - [f'(S) + ff'(S)]\,\alpha\right\}K$$

$$(3)\ldots U = \left(\frac{ag}{b}\right)^{\frac{1}{2}}[f'(S) - ff'(S)]\,\alpha$$

$$(4)\ldots 0 = [f(S) + ff(S)]\,\alpha + \int\left[\delta S \log.\left(\frac{K}{B}\right)\right].$$

La première, qui est la différentielle de la quatrième, par rapport à S, combinée avec la troisième, donne

$$\alpha f'(S) = \frac{1}{2}\left\{U\sqrt{\left(\frac{b}{ag}\right)} - \log.\left(\frac{K}{B}\right)\right\}$$

$$\alpha ff'(S) = -\frac{1}{2}\left\{U\sqrt{\left(\frac{b}{ag}\right)} + \log.\left(\frac{K}{B}\right)\right\}.$$

Maintenant, comme l'état initial doit toujours être donné, on connaît les valeurs de K et de U, correspondantes à une valeur quelconque de S. On peut donc construire deux courbes, dont S serait l'abscisse commune, ayant $U\sqrt{\left(\frac{b}{ag}\right)}$ et $\log.\left(\frac{K}{B}\right)$ pour ordonnées correspondantes. Par les demi-différences ou les demi-sommes de ces ordonnées, on construira deux autres courbes qui auront $\alpha f'(S)$ et $\alpha ff'(S)$ pour ordonnées correspondantes à la même abscisse S; enfin, les aires de ces deux dernières courbes et de celle qui est le lieu des $\log.\left(\frac{K}{B}\right)$, donneront les valeurs de $\alpha f(S)$, $\alpha ff(S)$ et $\int\left[\delta S \log.\left(\frac{K}{B}\right)\right]$, pour une valeur quelconque de S.

511. Ainsi les deux courbes qui sont les lieux des $U\sqrt{\left(\frac{b}{ag}\right)}$ et des $\log.\left(\frac{K}{B}\right)$, dont l'une peut être appelée l'*échelle des vîtesses* et l'autre

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
U = la vîtesse initiale. P = la pression initiale, celle qui succède immédiatement à la pression qui a lieu dans l'état d'équilibre.			

l'*échelle des densités*, étant construites, on en déduit toutes les quantités qui composent les équations (1), (2), (3), (4) de l'article précédent, relatives à l'état initial. Prenant ensuite sur les axes des abscisses des deux courbes qui donnent $\alpha f'(S)$ et $\alpha ff'(S)$ des valeurs $S - t\sqrt{\frac{ag}{b}}$ et $S + t\sqrt{(\frac{ag}{b})}$, les ordonnées correspondantes sont $\alpha f'(S - t\sqrt{\frac{ag}{b}})$ et $\alpha f'(S + t\sqrt{\frac{ag}{b}})$; $\alpha ff'(S - t\sqrt{\frac{ag}{b}})$ et $\alpha ff'(S + t\sqrt{\frac{ag}{b}})$. Les quadratures donnent ensuite les fonctions primitives dont celles-ci sont les dérivées; au moyen de quoi tout est déterminé dans les équations de l'art. 509 ou dans les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
\psi = \int ds \log. \frac{K}{B} + \alpha f(S + t\sqrt{\frac{ag}{b}}) + \alpha ff(S - t\sqrt{\frac{ag}{b}}) \\
(\frac{ds}{dS}) = 1 + \log. \frac{K}{B} + \alpha f'(S + t\sqrt{\frac{ag}{b}}) + \alpha ff'(S - t\sqrt{\frac{ag}{b}}) \\
v = (\frac{ds}{dt}) = \alpha (\frac{ag}{b})^{\frac{1}{2}} \{ f'(S + t\sqrt{\frac{ag}{b}}) - ff'(S - t\sqrt{\frac{ag}{b}}) \},
\end{array}\right\}$$

en y réunissant l'équation $k = \frac{K}{(\frac{ds}{dS})}$.

On aura ainsi les phénomènes de la propagation du son pour un instant quelconque, en ne considérant néanmoins, dans le mouvement des particules de l'air, qu'une seule dimension; mais cette considération suffit dans beaucoup de cas, ceux particulièrement qui se rapportent à un très-grand nombre d'instrumens acoustiques. Une analyse tout-à-fait semblable, donne la solution du problème de la corde vibrante dont nous parlerons dans la suite. Les applications détaillées des formules précédentes, seraient extrêmement curieuses; mais la nature et les bornes de cet ouvrage m'obligent de les supprimer.

512. Considérons maintenant la propagation du son dans le cas de trois dimensions, qui est toujours celui de la nature; car on ne fait abstraction d'une ou deux dimensions que pour simplifier le calcul, et lorsque ces dimensions sont assez petites par rapport à celle qu'on considère, pour que les termes qui en doivent être affectés n'aient pas une influence sensible sur les résultats.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
			317. Déterminer les phénomènes de la propagation du son dans le cas de la nature, celui où la propagation se fait en tout sens.

Les équations du mouvement qui se rapportent à ce cas, peuvent aisément se déduire des équations générales du mouvement des fluides: mais je vais, pour plus de facilité, indiquer rapidement la marche de l'analyse au moyen de laquelle on les obtiendrait directement.

Une molécule d'air en équilibre a pour coordonnées d'un de ses points X, Y et Z; la force élastique, à ce point, est mesurée par la hauteur d'une colonne d'air $= h$, la densité de cette colonne étant celle qui a lieu au point dont il s'agit.

La position d'un point infiniment voisin de celui dont il s'agit, est déterminée par les incrémens dX, dY et dZ dont les rapports peuvent être quelconques.

L'équilibre de la masse d'air étant troublé, les deux points dont les coordonnées respectives sont X, Y, Z et $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, changent de position, et on suppose que leurs coordonnées deviennent respectivement, au bout du temps t, x, y, z et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Ces six dernières coordonnées sont fonctions des six premières et du temps. Si l'on considère les valeurs X, Y, Z et $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ comme contemporaines, et qu'au bout d'un temps t, écoulé depuis que ces valeurs ont eu lieu, on considère x, y, z et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ également comme contemporaines, on aura les relations,

$$dx = L\,dX + M\,dY + N\,dZ$$
$$dy = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ$$
$$dz = S\,dX + T\,dY + V\,dZ.$$

Les coëfficiens L, M, &c., peuvent ne pas contenir x, y, z, parce que ces variables ont une relation donnée avec X, Y et Z, au moyen de laquelle on peut les éliminer des seconds membres; mais ils doivent contenir le temps t, sans cependant avoir de termes de la forme $K\,dt$, parce que les positions respectives des deux points sont considérées comme contemporaines, soit au commencement, soit à la fin de t, et qu'on a $x =$ fonction finie de X, Y, Z et de t, &c.; $X + dx =$ fonction finie de $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, et de t, &c. &c.; la différentielle dt n'entre pour rien dans les relations d'après lesquelles les équations ci-dessus sont établies.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
Les coèfficiens L, M, N, &c. dérivent des fonctions de X, Y, Z et t, qui sont les valeurs de x, y et z.			

Imaginons, dans l'état d'équilibre de l'air, une pyramide infiniment petite, dont trois arêtes soient respectivement parallèles aux x, y et z; le sommet de l'angle solide formé par ces trois arêtes étant le point qui a X, Y et Z pour coordonnées. Soient α, β et γ les longueurs respectives de ces arêtes parallèles aux x, y et z. La solidité de cette pyramide $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$; et lorsque l'état d'équilibre aura été troublé, cette solidité deviendra,

$$\tfrac{1}{6}\alpha\beta\gamma\{S(NQ - MR) + T(LR - NP) + V(LQ - MP)\}.$$

La densité qui était $= 1$ dans l'état primitif, sera dans l'état troublé,

$$\frac{1}{S(NQ - MR) + T(LR - NP) + V(LQ - MP)};$$

et si, dans l'état troublé, on mesure la densité par la hauteur Π d'une colonne d'air, cette colonne ayant une densité égale à celle de l'air consideré dans l'état d'équilibre, on a,

$$\Pi = \frac{}{S(NQ - MR) + T(LR - NP) + V(LQ - MP)};$$

Π est donc fonction de X, Y, Z et de t; c'est-à-dire qu'on a,

$$d\Pi = E\,dX + F\,dY + G\,dZ,$$

en prenant Π pour une valeur déterminée de t, qu'on ne fait par conséquent point varier dans L, M, &c.

513. Ces préliminaires posés, on parvient aux équations générales du mouvement par des procédés semblables à ceux indiqués au commencement de cette section; mais comme il s'agit ici du cas où les molécules s'écartent peu de leurs positions initiales, on suppose

$$x - X = p, \quad y - Y = q, \quad z - Z = r$$

p, q, r étant des quantités extrêmement petites, et on obtient les trois équations

$$\frac{1}{gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right)$$

$$\frac{1}{gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right)$$

$$\frac{1}{gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dZdY}\right) + \left(\frac{ddp}{dZdX}\right).$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
α, β et γ sont, dans l'état d'équilibre, les valeurs des arêtes d'une pyramide infiniment petite, dont X, Y et Z déterminent la position ; α étant parallèle aux x, β aux y et γ aux z.			
Π = la densité, au bout du temps t, de la molécule d'air qui, dans l'état d'équilibre, avait X, Y et Z pour coordonnées.			
p, q et r sont les espaces supposés très-petits que la molécule parcourt, pendant le temps t, parallélement aux x, y et z, à compter de la position déterminée par les coordonnées X, Y et Z.			318. Introduire dans le problème précédent, la condition que les molécules d'air agitées s'éloignent très-peu de leur position initiale.

514. Soit

$$\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = u \ldots (K);$$

les équations précédentes deviendront,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) &= \left(\frac{du}{dX}\right); \text{ d'où } \frac{1}{gh}\left(\frac{d^3p}{dt^2dX}\right) = \left(\frac{ddu}{dX^2}\right) \\
\frac{1}{gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) &= \left(\frac{du}{dY}\right); \text{ d'où } \frac{1}{gh}\left(\frac{d^3q}{dt^3dY}\right) = \left(\frac{ddu}{dY^2}\right) \\
\frac{1}{gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) &= \left(\frac{du}{dZ}\right); \text{ d'où } \frac{1}{gh}\left(\frac{d^3r}{dt^2dZ}\right) = \left(\frac{ddu}{dZ^2}\right)
\end{aligned}\right\} (L).$$

Mais si l'on différencie deux fois l'équation (K) par rapport à t, on aura,

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3p}{dt^2dX}\right) + \left(\frac{d^3q}{dt^2dY}\right) + \left(\frac{d^3r}{dt^2dZ}\right);$$

donc $\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) =$ la somme des premiers membres de l'équation (L) divisée par $\frac{1}{gh}$, et par conséquent la somme des seconds membres multipliée par gh; ce qui donne,

$$515.\quad \frac{1}{gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dX^2}\right) - \left(\frac{ddu}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dZ^2}\right).$$

516. Le plan des XY étant supposé horizontal, si l'on suppose que toutes les molécules d'air agitées sont renfermées entre deux plans horizontaux infiniment près l'un de l'autre, l'équation précédente se réduira à,

$$\frac{1}{gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dY^2}\right);$$

c'est celle dont on a donné l'intégrale art. 398.

517. Dans l'hypothèse où, en conservant les trois dimensions, l'ébranlement initial serait renfermé dans un petit espace d'où il se répandrait ensuite en tous sens, si l'on pose,

$$p = Xs;\ q = Ys;\ r = Zs;\ s = \frac{\rho}{R},$$

on parvient à l'équation, aux différences partielles, du second ordre,

$$\frac{1}{gh}\left(\frac{dd\rho}{dt^2}\right) = \frac{-2\rho}{R^2} + \frac{2}{R}\left(\frac{d\rho}{dR}\right) + \left(\frac{dd\rho}{dR^2}\right),$$

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
$u = \left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$.			
g = la force accélératrice de la pesanteur.			319. Réduire à une équation unique, les trois équations qui résolvent le problème précédent.
			320. Appliquer la solution du même problème, au cas où l'on ne considère que deux dimensions dans la propagation du son.
$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ = la distance, à l'origine fixe, de la molécule dans l'état d'équilibre. L'origine des X, Y et Z est au centre du petit espace où l'ébranlement initial a eu lieu.			321. Résoudre le même problème, dans le cas où l'ébranlement initial est renfermé dans un petit espace, d'où il se répand ensuite en tous sens.
$\rho = \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$ = la distance de la molécule, lorsque le temps t est écoulé, au point où cette molécule			

ayant pour résolution générale, semblable à celle du cas où on ne suppose à l'air qu'une seule dimension,

$$\varrho = \frac{A}{R^2}\varphi[R + t\sqrt{(gh)}] - \frac{A}{R}\varphi'[K + t\sqrt{(gh)}]$$
$$+ \frac{B}{R^2}\psi[R - t\sqrt{(gh)}] - \frac{B}{R}\psi'[R - t\sqrt{(gh)}],$$

et on a les valeurs

$$p = \frac{X}{R}\varrho;\; q = \frac{Y}{R}\varrho;\; r = \frac{Z}{R}\varrho.$$

On a ensuite pour calculer la vîtesse,

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{(gh)}}{R^2}\varphi'[R+t\sqrt{(gh)}] - \frac{A\sqrt{(gh)}}{R}\varphi''[R+t\sqrt{(gh)}]$$
$$- \frac{B\sqrt{(gh)}}{R^2}\psi'[R-t\sqrt{(gh)}] + \frac{B\sqrt{(gh)}}{R}\psi''[R-t\sqrt{(gh)}].$$

518. Il résulte de ce qui précède, qu'une couche sphérique dont le rayon $= R$, demeure en repos jusqu'à ce que l'expression $R - t\sqrt{(gh)}$ ait acquis une valeur très-petite, ou moindre que le rayon de la petite sphère dans laquelle l'ébranlement initial a eu lieu.

519. Calculant la vîtesse de la propagation du son par la formule $t = \frac{R}{2gh}$, dans l'hypothèse où la pesanteur spécifique de l'air serait, à une température moyenne, $= 0{,}001123$, ou $= \frac{1}{812}$ (la densité de l'eau est prise pour terme de comparaison), on trouve 288 mètres, à-peu-près, pour l'espace parcouru par le son, dans une seconde sexagésimale de temps; l'expérience a donné 338 mètres : ainsi le résultat déduit de la théorie, est trop foible de plus d'un sixième.

Fin de la troisième Partie.

NOTATION.	DÉFINITIONS.	THÉORÈMES.	PROBLÈMES.
était placée dans l'état d'équilibre. s = une fonction du temps t et de R, laquelle fonction est la valeur commune de $\frac{p}{X}$, $\frac{q}{Y}$, $\frac{r}{Z}$ et $\frac{\rho}{R}$; ainsi p, q et r sont supposées avoir entre elles le même rapport que X, Y et Z, c'est-à-dire que la molécule ébranlée est censée se mouvoir dans la direction du rayon R, qui joint le point où elle se trouvait, avant l'ébranlement, à l'origine fixe des X, Y et Z. φ et ψ sont des signes de fonctions, dont φ' et ψ' sont les fonctions dérivées.		202. Une couche sphérique d'air dont le rayon $= R$, demeure en repos jusqu'à ce que l'expression $R - t\sqrt{(gh)}$ ait acquis une valeur très-petite, ou moindre que le rayon de la petite sphère dans laquelle l'ébranlement initial est supposé avoir eu lieu. 203. La vîtesse du son calculée par la théorie, est de 288 mètres par seconde, au lieu de 338 que donne l'expérience.	

ERRATA.

PAGE 25, THÉORÈME 15, ligne 9 : *décomposer*, lisez, *décomposez*.

Page 52, lignes 15 et 16 : *deux forces égales et directement opposées*, lisez, *quatre forces, dont deux étaient, respectivement, égales et directement opposées aux deux autres.*

Page 68, fin de la ligne 7 : $+ V_{\prime\prime}$, lisez, $+ V_{\prime\prime}^2$.

Page 70, ligne 7 : $x = \frac{1}{2} g t^2$, lisez, $s = \frac{1}{2} g t^2$.

Idem, ligne 17 : *art. 6*, lisez, *art. 108.*

Page 72, ligne 7 à compter du bas : $A^2 e^2$, lisez, $A^2 t^2$.

Page 90, ligne 10 à compter du bas : $\frac{z - \alpha}{b - z}$, lisez, $\sqrt{\left(\frac{z - \alpha}{b - z}\right)}$.

Page 97, colonne NOTATION, vis-à-vis l'art. 136 : $p_\prime$, $q_\prime$ *et* $r_\prime$ sont, respectivement, les plus courtes distances entre la direction de la puissance $P_\prime$ et les axes des x, y *et* z ; il en est de même de $p_{\prime\prime}$, $q_{\prime\prime}$, $r_{\prime\prime}$ par rapport à $P_{\prime\prime}$, &c.

Page 136, avant-dernière ligne : l'*équerre* et l'*épure*, lisez, l'*épure* et l'*appareil.*

Page 146, ligne 11 : $cos.\ \gamma$, lisez, $cot.\ \gamma$.

Idem, ligne 13 : $F\, sin.\, n\, cos.\, \theta$, lisez, $F\, cos.\, n\, sin.\, \theta$.

Idem, avant-dernière ligne : $- 2 E^2 B$, lisez, $- 2 E^2 F$.

Page 158, ligne 6 à compter du bas : *angle* θ, lisez, *angle* $(f - \theta)$.

Page 175, colonne NOTATION, ligne 5 : *feront*, lisez, *feraient.*

Page 178, ligne 7 : θ' *et de* n', lisez, θ *et de* n.

Page 208, ligne 7 à partir du bas : $p =$, lisez, $q =$.

Page 212, lignes 8 et 11 à partir du bas, mettez V, au lieu de U.

Page 216, lignes 7, 9, 10 et 11 : changer tous les signes des numérateurs.

Idem, dernière ligne : plan xz, lisez, plan yz.

Page 218, ligne 2 : $= -$, lisez, $= +$.

Page 230, ligne 6 à partir du bas : *227 et 128*, lisez, *128.*

Idem, ligne 10 à partir du bas : *126*, , lisez, *127.*

Page 234, ligne 6 : $z_{\prime\prime} - z_\prime + a$, lisez, $z_{\prime\prime} - z_\prime$.

Page 240, lignes 9 et 10 : au lieu de *masse de forme quelconque*, lisez, *partie.*

Idem, ligne 11, après le mot *cylindre*, ajoutez, *par rapport à l'axe duquel cette partie submergée est symétrique.*

Page 241, colonne NOTATION, ligne 4 : V, lisez, v.

Idem, ligne 6 : *intérieure*, lisez, *inférieure.*

Page 262, dernière ligne : $\theta =$ *circonférence*, lisez, $\theta =$ arc. tang. $\frac{\lambda}{aV + q} +$ circonférence.

Page 265, colonne NOTATION, ligne 2, ajoutez après le mot *cylindre*, les mots, *qui forme la partie submergée du corps.*

Page 290, ligne 5 à partir du bas : $\frac{dp}{K}$, lisez, $\frac{dp}{k}$.

Page 294, ligne 9 à compter du bas : $\frac{1}{169}$, lisez, $\frac{1}{269}$.

Page 296, ligne 8 : *avait*, lisez, *eut.*

Page 299, colonne NOTATION, ligne 6 : r —, lisez, q —.

Page 302, ligne 11 à compter du bas, mettez ces mots, *contre le mur*, entre deux virgules.

Page 304, ligne 11 : $\frac{1}{2}\pi h'$, lisez, $\frac{1}{2}\pi h_{,}$.

Page 306, lignes 8 et 9 : *dépendent de*, lisez, *sont déduites de.*





